الإحتمالات الشرطية

القوائــم

تعريف : (Ω) مجموعة منتهية ذات n عنصر حيث $n \in IN^*$ و $p \in IN^*$

نسمي قائمة ذات p عنصر من المجموعة (Ω) كل متتالية مرتبة من p حد مأخوذ من المجموعة (Ω)

مثال : $(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3\}$

قوائم المجموعة (Ω) ذات عنصرين هي

$\{(1 ; 1) ; (1 ; 2) ; (1 ; 3) ; (2 ; 1) ; (2 ; 2) ; (2 ; 3) ; (3 ; 1) ; (3 ; 2) ; (3 ; 3)\}$

ملاحظة : عدد القوائم ذات p عنصر من المجموعة ذات n عنصر هو n^p

مثلا : في المثال السابق عدد القوائم ذات عنصرين من المجموعة $\{1 ; 2 ; 3\}$ هو $3^2 = 9$

الترتيبة :

(Ω) مجموعة منتهية ذات n عنصرا حيث $n \in IN^*$ و $p \in IN^*$

كل قائمة ذات p عنصرا متمايزا مثنى مثنى من عناصر المجموعة (Ω) تسمى ترتيبة ذات p عنصرا من المجموعة (Ω)

و عددها هو A_n^p معرف كمايلي : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times (n-p+1)$

حالات خاصة :

إذا كان $p > n$ فإن $A_n^p = 0$

إذا كان $p = n$: $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$ نرمز له بـــ $n!$ و يقرأ "n عاملي" أو "مفكوك n"

في هذه الحالة كل ترتيبة تسمى أيضا تبديلة ذات n عنصر من المجموعة (Ω)

نشاط :

نريد ترتيب 8 أشخاص حول طاولة مستديرة

بكم طريقة مختلفة يمكن تحديد وضعية كل شخص ؟

الحــل :

إذا اعتبرنا كل وضعية للجلوس هي قائمة ذات 8 عناصر من مجموعة الأشخاص ذات 8 عناصر فإن عدد هذه الوضعيات هو تبديلات لـــ 8 عناصر من بين 8 عناصر لأن الأشخاص مختلفة مثنى مثنى . و عليه فعدد الوضعيات المختلفة للجلوس هو $8!$

التوفيقات :

(Ω) مجموعة منتهية ذات n عنصرا حيث $n \in IN^*$. p عدد طبيعي حيث $0 \leq p \leq n$

نسمي توفيقة ذات p عنصر من عناصر المجموعة (Ω) كل جزء ذات p عنصر من المجموعة (Ω)

نرمز إلى عدد التوفيقات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر بالرمز C_n^p أو $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ و نقرأ : توفيقة ذات p عنصر من بين n عنصر .

نتائج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$C_n^0 = 1$: يوجد جزء وحيد خالي

$C_n^n = 1$: يوجد جزء وحيد يحتوي على كل عناصر المجموعة (Ω) و هو (Ω)

إذا كان $0 \leq p \leq n$ فإن :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

مثال :

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

خواص أساسية :

n و p عددين طبيعيين حيث $0 \leq p \leq n$

1 – $C_n^p = C_n^{n-p}$

2 – $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

مثلث باسكال : هو مثلث يسمح بحساب C_n^p باستعمال الخواص كمايلي :

← الأسطر تمثل العدد n

← الأعمدة تمثل العدد p

← العمود الأول يمثل C_n^0 إذن : $C_n^0 = 1$

← الأعمدة الأخيرة تمثل C_n^n إذن : $C_n^n = 1$

← حسب الخاصية $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

يمكن التنقل من سطر إلى آخر.

أنظر المثلث المقابل :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	C_n^p	C_n^{p+1}	6	1	
7	1	7			C_{n+1}^{p+1}			1

نشاط :

يحتوي صندوق على 9 كرات لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد . فما هو عدد الحالات الممكنة ؟

الحـل :

كل سحب لثلاث كرات هو توفيقة لـ 3 عناصر من بين 9 عناصر (جزء ذات 3 عناصر من مجموعة ذات 9 عناصر)

إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $C_9^3 = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$

دستور ثنائي الحد

A و B عددان حقيقيان . n عدد طبيعي غير معدوم .

$$(A+B)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \times A^{n-p} \times B^p$$

$$= A^n + C_n^1 A^{n-1} B + C_n^2 A^{n-2} B^2 + ... + C_n^{n-1} A B^{n-1} + B^n$$

مثال :

$$(a+b)^2 = a^2 + C_2^1 a b + b^2 = a^2 + 2 a b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + b^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$$

نشاط :

أحسب $A = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k C_n^k$

الحـل :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times C_n^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times (1)^{n-k} \times C_n^k$$

إذن : حسب دستور ثنائي الحد : $A = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

نشاط :

أحسب $B = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k$

الحـل :

$$B = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times C_n^k$$

إذن : حسب دستور ثنائي الحد : $B = \left(\frac{1}{4} + 3\right)^n = \left(\frac{13}{4}\right)^n$

نمذجة تجربة عشوائية

عند القيام بتجربة عشوائية تكون مجموعة نتائجها الممكنة منتهية و قابلة للعد تسمى مخارج التجربة و نرمز لها بـــ $E = \{x_1 ; x_2 ; ...... x_n\}$

نعرف على هذه المجموعة قانون احتمال p و هو كل متتالية عددية معرفة من المجموعة $\{1 ; 2 ; .... n\}$ نحو المجموعة $[0 ; 1]$ ترفق بعنصر i العدد الحقيقي p_i حيث $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$

كل عدد حقيقي p_i يسمى احتمال الحادثة x_i و نكتب $p(x_i) = p_i$

في حالة تساوي الاحتمال بين كل الحوادث فإن :

$p_1 + p_2 + ... + p_i = 1$ يكافئ $p_1 + p_1 + ... + p_1 = 1$

يكافئ $n\, p_1 = 1$

يكافئ $p_1 = 1/n$

مبرهنة : في حالة تساوي احتمال على مجموعة المخارج E فإن من أجل كل حادثة A

لدينا : $p(A) = \dfrac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$

مثلا : نسحب كرة واحدة من كيس فيه 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6

لتكن A الحادثة : سحب كرة رقمها مضاعف 3

إذا كان الاحتمال متساوي فإن : $p(A) = 2/6$ لأن :

$E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ إذن : عدد عناصر E هو 6

$A = \{3 ; 6\}$ إذن : عدد عناصر A هو 2

خواص أساسية و مصطلحات الاحتمالات

E مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية .

A و B حادثتين (مجموعتين جزئيتين من المجموعة E)

p قانون احتمال معرف على المجموعة E

1 ــ $0 \leq p(A) \leq 1$

2 ــ $p(\phi) = 0$: حادثة مستحيلة .

3 ــ $p(E) = 1$: حادثة أكيدة .

4 ــ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$: A و B حادثتان كيفيتان .

5 ــ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$: A و B حادثتان غير متلائمتين .

6 ــ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$: $\overline{A} = E - A$

المتغير العشوائي

نسمي متغير عشوائي X كل دالة عددية معرفة على مجموعة الامكانيات E مزودة بقانون احتمال p حيث X يأخذ القيم $X_1 ; X_2 ; ..... X_n$ بالاحتمالات $p_1 ; p_2 ; ..... p_n$ معرفا كمايلي : $p(X = X_i) = p_i$

مثال : صندوق يحتوي على كرتين لا نفرق بينهما عند اللمس أحدهما بيضاء B و الأخرى سوداء N نسحب 3 مرات كرة واحدة مع إرجاعها بعد كل سحب إلى الصندوق .

إذن : المخارج الممكنة $E = \{BBB ; BBN ; BNB ; BNN ; NBB ; NBN ; NNB ; NNN\}$

ليكن سحب كرة بيضاء يؤدي إلى ربح 20 DA و سحب كرة سوداء يؤدي إلى خسارة 10 DA . نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حادثة مجموع المبالغ الناتجة (ربح أو خسارة مثلا : BBN يؤدي إلى $X = 20 + 20 - 10$)

القيم الممكنة لـ X :

الحوادث	BBB	BBN	BNB	BNN	NBB	NBN	NNB	NNN
قيم X	60	30	30	0	30	0	0	- 30

إذن : X يأخذ القيم {- 30 ; 0 ; 30 ; 60}

يكون x = - 30 إذا وفقط إذا كانت نتيجة التجربة NNN

يكون x = 0 إذا و فقط إذا كانت نتيجة التجربة BNN أو NBN أو NNB

يكون x = 30 إذا و فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBN أو BNB أو NBB

يكون x = 60 إذا و فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBB

منه :
$p(X = -30) = 1/8$
$p(X = 0) = 3/8$
$p(X = 30) = 3/8$
$p(X = 60) = 1/8$

إذن : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو كمايلي :

X_i	- 30	0	30	60
$p(X = X_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

الأمل الرياضياتي ، التباين

ليكن X متغير عشوائي يأخذ القيم $\{X_1 ; X_2 ; ..... X_n\}$

نضع $p(X = X_i) = p_i$

الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو $E(X) = \sum_{k=1}^{n} X_k \, p(X = X_k)$

تباين المتغير العشوائي X هو العدد : $Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X))^2 \, p(X = X_k)$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

التفسير الفيزيائي

E(X) هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب عند القيام بالتجربة عدة مرات .

و عليه فإن : إذا كان $E(X) = 0$ فإن اللعبة عادلة

إذا كان $E(X) > 0$ فإن اللعبة مربحة

إذا كان $E(X) < 0$ فإن اللعبة ليست في صالح اللاعب

مبرهنة

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية

a عدد حقيقي ، E(X) ، E(Y) ، E(X + Y) هي على الترتيب الأمل الرياضياتي للمتغيرات العشوائية X ، Y ، X + Y

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ و $E(a X) = a E(X)$

نتائج : X متغير عشوائي و a و b عددان حقيقيان

1 – $E(X + b) = E(X) + b$ لأن $E(b) = b$

2 – $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

3 – $Var(a X) = a^2 \, Var(X)$ و $\sigma(a X) = |a| \sigma(X)$

4 – $Var(X + b) = Var(X)$ و $\sigma(X + b) = \sigma(X)$

إثبات الخاصية (2)

$$Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (X_i - E(X))^2 \, p(X = X_i)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [X_i^2 - 2 X_i E(X) + E^2(X)] \, p(X = X_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \, p(X = X_i) - 2 E(X) \sum_{i=1}^{n} X_i \, p(X = X_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^{n} p(X = X_i)$$
$$= E(X^2) - 2 E(X) \times E(X) + E^2(X)$$ لأن $\sum_{i=1}^{n} p(X = X_i) = 1$
$$= E(X^2) - E^2(X)$$

الاحتمالات الشرطية

تعريف :

A و B حادثتان حيث $p(A) \neq 0$

احتمال وقوع الحادثة B علما أن A محققة يسمى احتمال شرطي نرمز له بـــ $p_A(B)$ حيث $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

و نقرأ : احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة

مثال : نرمي زهرة نرد ذات 6 أوجه غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6

لتكن A الحادثة النتيجة عدد فردي

B الحادثة النتيجة عدد مضاعف 3

لدينا : $p(A) = 3/6$ ؛ $p(B)\ 2/6$ ؛ $p(A \cap B) = 1/6$

منه : احتمال الحصول على عدد مضاعف 3 علما أن النتيجة عدد فردي هي $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{1/6}{3/6} = \dfrac{1}{3}$

تحقيق : إذا كانت النتيجة فردية فإن عدد الحالات الممكنة هي $\{1 ; 3 ; 5\}$

من بين هذه الحالات العدد 3 فقط مضاعف 3 إذن : $p_A(B) = 1/3$

تطبيق:

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع

لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء

B الحادثة : الكرة الثانية خضراء

أحسب $p(A)$ ؛ $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحــل:

عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

لتكن R كرة حمراء و V كرة خضراء

الحادثة A توافق الحالات التالية : RR أو RV

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 + A_6^2 = 18 + 30 = 48$

نتيجة : $p(A) = \dfrac{48}{72} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

الحادثة B علما أن A محققة توافق الحالات RV من بين RR و RV

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 = 18$ من بين $18 + 30 = 48$

نتيجة : $p_A(B) = \dfrac{18}{48} = \dfrac{3}{8}$

خلاصة : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ منه : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

أي : $p(A \cap B) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}$

تحقيق : الحادثة $(A \cap B)$ توافق الحالات RV و عددها $6 \times 3 = 18$

منه : $p(A \cap B) = \dfrac{18}{72} = \dfrac{1}{4}$

الحوادث المستقلة :

تعريف : نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا و فقط إذا كان $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(أي اذا كان $p(A) \neq 0$ فإن $p_A(B) = P(B)$)

المتغيرات العشوائية المستقلة

X و Y متغيران عشوائيان على نفس الفضاء الاحتمالي E

لتكن $X_1 ; X_2 ; ... X_n$ قيم المتغير العشوائي X

و $Y_1 ; Y_2 ; ... X_m$ قيم المتغير العشوائي Y

تعريف :

نقول أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان إذا و فقط إذا كانت الحادثتان $X = X_i$ و $Y = Y_j$ مستقلتان من أجل كل $1 \leq i \leq n$ و من أجل كل $1 \leq j \leq m$

ملاحظة : إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مرتبطان بتجربتين مختلفتين فإنهما حتما مستقلان

نشاط :

نرمي ثلاث مرات متتالية قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه و ظهر

نرمز بـ X لعدد مرات ظهور الوجه في الرمية الأولى

نرمز بـ Y لعدد مرات ظهور الوجه في الرميتين الثانية و الثالثة

تحقق أن X و Y هما متغيران عشوائيان مستقلان .

الحل :

نرمز إلى الوجه بـ F و الظهر بـ P

إذن : مجموعة الامكانيات للتجربة هي كما يلي :

$$E = \{PPF ; PPP ; PFF ; PFP ; FFF ; FFP ; FPF ; FPP\}$$

الوجه إما يظهر مرة واحدة في الرمية الأولى أو لا يظهر اطلاقا .

إذن : قيم المتغير العشوائي X هي $\{0 ; 1\}$

الوجه إما لا يظهر في كلا من الرميتين الثانية و الثالثة أو يظهر مرة واحدة فقط إما في الثانية أو الثالثة أو يظهر في كلا من الثانية و الثالثة إذن : المتغير العشوائي Y يأخذ القيم $\{0 ; 1 ; 2\}$

الحادثة	الحالات الملائمة للحادثة	احتمال الحادثة
$X = 0$	PPF ; PPP ; PFF ; PFP	$4/8 = 1/2$
$X = 1$	FFF ; FFP ; FPF ; FPP	$4/8 = 1/2$
$Y = 0$	PPP ; FPP	$2/8 = 1/4$
$Y = 1$	PPF ; PFP ; FFP ; FPF	$4/8 = 1/2$
$Y = 2$	FFF ; PFF	$2/8 = 1/4$

من جهة أخرى لدينا الاحتمالات التالية :

الحادثة	الحالات الملائمة	احتمال الحادثة
$X = 0$ و $Y = 0$	PPP	$1/8$
$X = 0$ و $Y = 1$	PFP ; PPF	$2/8 = 1/4$
$X = 0$ و $Y = 2$	PFF	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 0$	FPP	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 1$	FFP ; FPF	$2/8 = 1/4$
$X = 1$ و $Y = 2$	FFF	$1/8$

مقارنة :

$$p(X = 0) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 0)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 0 ; Y = 1)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 2)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 0)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 1 ; Y = 1)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 2)$$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ من أجل كل $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$ لدينا :

$$p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i ; Y = k)$$

إذن : الحوادث X_i و Y_k مستقلة مثنى مثنى .

منه : المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـ 1

يحتوي صندوق على 32 كرة لا نفرق بينها عند اللمس .
نسحب من الصندوق 8 كرات عشوائيا . أحسب عدد الحالات الممكنة للسحب

الحـل ـ 1

لحساب عدد الحالات الممكنة للسحب نميز بين ثلاث أنواع من السحب كمايلي :

a) **سحب في آن واحد** : إذن كل سحب هو توفيقة لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو C_{32}^{8}

b) **سحب على التوالي دون ارجاع** : إذن كل سحب هو ترتيبة لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو A_{32}^{8}

c) **سحب على التوالي بارجاع** : إذن كل سحب هو قائمة لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو $(32)^8$

التمرين ـ 2

أحسب مايلي :

a) $A=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{2^k}$ (b $B=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k}$

الحـل ـ 2

(a
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times (1)^{n-k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$= \left(1+\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

إذن : $A=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

(b
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times 3^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k$$
$$= \left(3+\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= \left(\frac{13}{4}\right)^n$$

منه : $B=\left(\frac{13}{4}\right)^n$

التمرين ـ 3

يحتوي صندوق A على 3 كرات حمراء ؛ 3 كرات سوداء ؛ 5 كرات خضراء
يحتوي صندوق B على 7 كرات حمراء ؛ 4 كرات سوداء ؛ 2 كرات خضراء
جميع الكرات متساوية الاحتمال في السحب
نسحب كرة من الصندوق A ثم كرة من الصندوق B

لتكن الحوادث التالية : V : سحب كرة خضراء من الصندوق A
V' : سحب كرة خضراء من الصندوق B
N : سحب كرة سوداء من الصندوق B
R : سحب كرة حمراء من الصندوق B

1 ـ أحسب p(V) ؛ p(V') ؛ p(N) ؛ p(R)
2 ـ أحسب احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B

الحـل ــ 3

1 ــ عدد الكرات الخضراء في الصندوق A هو 5 إذن : $p(V) = 5/11$

عدد الكرات الخضراء في الصندوق B هو 2 إذن : $p(V') = 2/13$

عدد الكرات السوداء في الصندوق B هو 4 إذن : $p(N) = 4/13$

عدد الكرات الحمراء في الصندوق B هو 7 إذن : $p(R) = 7/13$

2 ــ احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B هو $p(V) \times p(V') = \frac{5}{11} \times \frac{2}{13}$

التمرين ــ 4

يشارك رشيد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها هو 0,6 . قرر رشيد المحاولة 5 مرات متتابعة . نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل 5 محاولات عدد مرات الفوز

1 ــ عرف قانون الاحتمال للمتغير X

2 ــ أوجد الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري لــ X

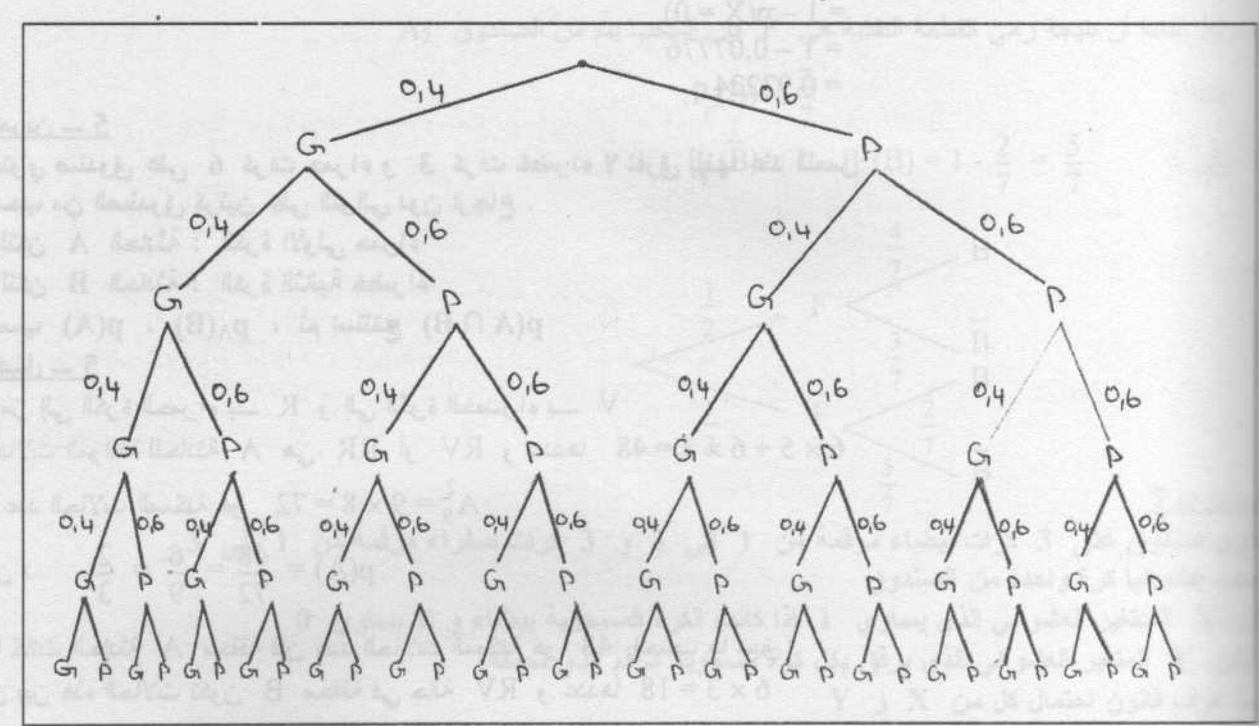
3 ــ ما هو احتمال الحادثتين : A : دوما يفشل في المحاولات الخمسة

B : يفوز مرة واحدة على الأقل

الحـل ــ 4

نرمز إلى حالة الفوز بــ G و إلى حالة الفشل بــ P

نمثل الحالات الممكنة على شكل شجرة كما يلي :



1 ــ X هو عدد مرات الفوز إذن : X يأخذ القيم $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

منه الجدول التالي :

الحادثة	الحالات الملائمة للحادثة
$X = 0$	PPPPP
$X = 1$	GPPPP ; PGPPP ; PPGPP ; PPPGP ; PPPPG
$X = 2$	GPPPG ; GPPGP ; GPGPP ; GGPPP ; PGGPP ; PGPGP ; PGPPG ; PPGGP ; PPGPG ; PPPGG
$X = 3$	GGGPP ; GGPGP ; GGPPG ; GPGGP ; GPGPG ; GPPGG ; PGGGP ; PGPGG ; PPGGG ; PGGPG
$X = 4$	GGGGP ; GGGPG ; GGPGG ; GPGGG ; PGGGG
$X = 5$	GGGGG

في كل مرة لدينا : $p(P) = 0,6$ و $p(G) = 0;4$
منه : النتائج التالية :

$p(X = 0) = (0,6)^5 = 0,07776$
$p(X = 1) = 5 \times [(0,6)^4 \times (0,4)] = 0,2592$
$p(X = 2) = 10 \times [(0,6)^3 \times (0,4)^2] = 0,3456$
$p(X = 3) = 10 \times [(0,6)^2 \times (0,4)^3] = 0.2304$
$p(X = 4) = 5 \times [(0,6) \times (0,4)^4] = 0,0768$
$p(X = 5) = (0,4)^5 = 0,01024$

منه قانون المتغير العشوائي X كمايلي :

X_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = X_i)$	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

2 ـــ $E(X) = 0 \times (0,07776) + 1(0,2592) + 2(0,3456) + 3(0,2304) + 4(0,0768) + 5(0,01024)$
$= 2$

$Var(X) = 0 \times (2 - 0,07776)^2 + 1(2 - 0,2592)^2 + 2(2 - 0,3456)^2 + 3(2 - 0,2304)^2 + 4(2 - 0,0768)^2 + 5(2 - 0,01024)^2$

$\sigma (X) = \sqrt{Var(X)}$

3 ـــ $p(A) = P(X = 0) = 0,07776$

$p(B) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$
$= 1 - p(X = 0)$
$= 1 - 0,07776$
$= 0,92224$

التمرين ــ 5

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس
نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع .
لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء
و لتكن B الحادثة : الكرة الثانية خضراء
أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ، ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحــل ــ 5

نرمز إلى الكرة الحمراء بـــ R و إلى الكرة الخضراء بـــ V
الحالات الموافقة للحادثة A هي RR أو RV و عددها $6 \times 5 + 6 \times 3 = 48$

و عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

إذن : $p(A) = \frac{48}{72} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

إذا كانت الحادثة A محققة فإن عدد الحالات الممكنة هو 48 (حسب ما سبق)
من بين هذه الحالات تكون B محققة في حالة RV و عددها $6 \times 3 = 18$

إذن : $p_A(B) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

نتيجة : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ منه : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{8}$

$= \frac{1}{4}$

التمرين ــ 6

يحتوي صندوق A_1 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء
و يحتوي صندوق A_2 على 2 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء
كل الكرات متساوية الاحتمال و لا نفرق بينها عند اللمس
نرمي قطعة نقدية غير مزيفة . إذا ظهر الوجه نسحب عشوائيا كرة من الصندوق
A_1 أما إذا ظهر " ظهر" نسحب كرة من الصندوق A_2

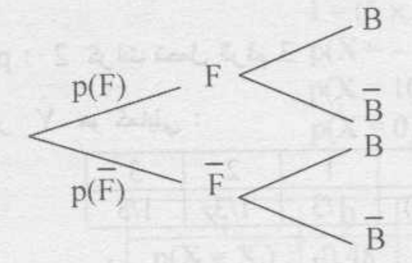
نسمي F الحادثة "ظهور وجه" و B الحادثة "الكرة المسحوبة بيضاء"

1 ـ أحسب $P(F)$ ؛ $P(\overline{F})$

2 ـ أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\overline{B})$

3 ـ أحسب $P_{\overline{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\overline{F}}(\overline{B})$

4 ـ أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



الحــل ــ 6

1 ـ القطعة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\overline{F}) = 1/2$

2 ـ إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

منه : $P_F(B) = \frac{4}{7}$

إذن : $P_F(\overline{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

3 ـ إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي $\overline{F}$ فإن السحب يتم من الصندوق A_2

منه : $P_{\overline{F}}(B) = \frac{2}{7}$

إذن : $P_{\overline{F}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{F}}(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

4 ـ

$\frac{1}{2}$ F ($\frac{4}{7}$ B ، $\frac{3}{7}$ $\overline{B}$)

$\frac{1}{2}$ $\overline{F}$ ($\frac{2}{7}$ B ، $\frac{5}{7}$ $\overline{B}$)

التمرين ــ 7

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3 .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0

و ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

1 ـ عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 ـ أحسب الأمل الرياضياتي لكل من X و Y

3 ـ برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 ـ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي $X.Y$ و أحسب أمله الرياضياتي

الحــل ــ 7

1 ـ X يأخذ القيم $\{0 ; 1\}$

$p(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ؛ $p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

منه : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

Y يأخذ القيم $\{1 ; 2 ; 3\}$

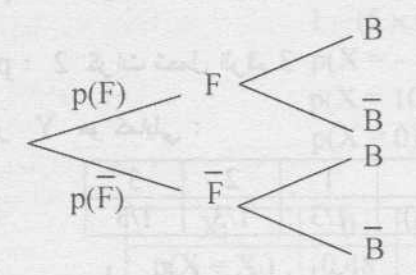
نسمي F الحادثة " ظهور وجه" و B الحادثة " الكرة المسحوبة بيضاء "

1 ـ أحسب $P(F)$ ؛ $P(\overline{F})$

2 ـ أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\overline{B})$

3 ـ أحسب $P_{\overline{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\overline{F}}(\overline{B})$

4 ـ أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



الحل ـ 6

1 ـ القطعة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\overline{F}) = 1/2$

2 ـ إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

منه : $P_F(B) = \frac{4}{7}$

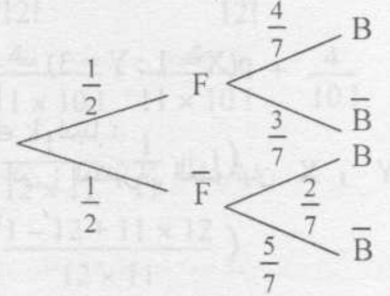
إذن : $P_F(\overline{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

3 ـ إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي $\overline{F}$ فإن السحب يتم من الصندوق A_2

منه : $P_{\overline{F}}(B) = \frac{2}{7}$

إذن : $P_{\overline{F}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{F}}(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

4 ـ



التمرين ـ 7

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3 .
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق
ليكن X التمتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0
و ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

1 ـ عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 ـ أحسب الأمل الرياضياتي لكل من X و Y

3 ـ برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 ـ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . Y و أحسب أمله الرياضياتي

الحل ـ 7

1 ـ X يأخذ القيم $\{0 ; 1\}$

$p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ؛ $p(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

منه : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

Y يأخذ القيم $\{1 ; 2 ; 3\}$

1 كرات تحمل الرقم 2 : $p(Y = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2 كرات تحمل الرقم 2 : $p(Y = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3 كرات تحمل الرقم 2 : $p(Y = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

منه : قانون احتمال المتغير Y هو كمايلي :

Y_i	1	2	3
$p(Y = Y_i)$	1/3	1/3	1/3

2 –
$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

3 –
$p(X = 0 ; Y = 1) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X = 0 ; Y = 2) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X = 0 ; Y = 3) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 1) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 2) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 3) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ و من أجل كل $k \in \{1 ; 2 ; 3\}$ لدينا :

$p(X = X_i ; Y = Y_k) = p(X = X_i) \times p(Y = Y_k)$ إذن : المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 – القيم الممكنة للمتغير العشوائي XY هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$$p(XY = 0) = p(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$p(XY = 1) = p(X = 1 ; Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY = 2) = p(X = 1 ; Y = 2) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY = 3) = p(X = 1 ; Y = 3) = \frac{1}{6}$$

منه قانون المتغير العشوائي XY كمايلي :

α_i	0	1	2	3
$p(XY = \alpha_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

$$E(XY) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1$$

التمرين – 8

نرمي زهرة نرد غير متوازنة مرة واحدة

ليكن X العلامة المحددة كمايلي :

a) العلامة (10 -) إذا ظهر الرقم 1

b) العلامة (10) إذا ظهر الرقم 6

c) العلامة (0) في الحالات الأخرى

نفرض أن احتمال ظهور الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12
عرف قانون احتمال العدد X

الحل – 8

احتمال ظهور الرقم 6 هو $1-(5\times 0{,}12)=1-0{,}6=0{,}4$

منه : النتائج التالية :

$p(X=-10)=0{,}12$

$p(X=10)=0{,}4$

$p(X=0)=4\times 0{,}12=0{,}48$

منه قانون الاحتمال للعدد X هو كمايلي :

X_i	0	- 10	10
$p(X=X_i)$	0,48	0,12	0,4

التمرين – 9

بسط الأعداد التالية :

a) $\dfrac{8!}{6!}$ c) $\dfrac{13!-12!}{12!}$

b) $\dfrac{11!}{9!\times 2!}$ d) $\dfrac{4}{12!}-\dfrac{4}{11!}+\dfrac{4}{10!}$

الحل – 9

a) $$\frac{8!}{6!}=\frac{8\times 7\times 6!}{6!}=8\times 7=56$$

b) $$\frac{11!}{9!\times 2!}=\frac{11\times 10\times 9!}{9!\times 2\times 1}=\frac{11\times 10}{2}=55$$

c) $$\frac{13!-12!}{12!}=\frac{13\times 12!-12!}{12!}=\frac{12!(13-1)}{12!}=13-1=12$$

d) $$\frac{4}{12!}-\frac{4}{11!}+\frac{4}{10!}=\frac{4}{12\times 11\times 10!}-\frac{4}{11\times 10!}+\frac{4}{10!}$$

$$=\frac{4}{10!}\left(\frac{1}{12\times 11}-\frac{1}{11}+1\right)$$

$$=\frac{4}{10!}\left(\frac{1-12+11\times 12}{12\times 11}\right)$$

$$=\frac{4}{10!}\left(\frac{121}{12\times 11}\right)$$

$$=\frac{4}{10!}\left(\frac{11\times 11}{12\times 11}\right)$$

$$=\frac{11}{10!\times 3}$$

التمرين – 10

n عدد طبيعي غير معدوم . بسط العبارات التالية :

a) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ c) $\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

b) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ d) $\dfrac{n!}{n}-(n-1)!$

الحل – 10

a) $$\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{n!}{(n+1)n!}=\frac{1}{n+1}$$

b) $$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}=2n(2n+1)=4n^2+2n$$

c) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n)}{(n+1)(n)(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$

d) $\frac{n!}{n} - (n-1)! = \frac{n! - n(n-1)!}{n} = \frac{n! - n!}{n!} = 0$

التمرين ــ 11

أكتب العبارات التالية باستعمال العاملي (!)

a) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$

b) $n(n-1)(n-2)$ **حيث n عدد طبيعي أكبر من 2**

c) $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7}$

الحــل ــ 11

a) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{4!}$

b) $n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$

c) $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7} = \frac{\frac{12!}{8!}}{\frac{7!}{4!}} = \frac{12!}{8!} \times \frac{4!}{7!}$

التمرين ــ 12

1 ــ بكم طريقة يمكن اختيار تلميذين من بين 26 تلميذ

2 ــ بكم طريقة يمكن اختيار مسؤول عنهم ثم نائب لهذا المسؤول

الحــل ــ 12

1 ــ اختيار تلميذين من بين 26 هو توفيقة لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها إذن :

$$C_{26}^{2} = \frac{26!}{24! \times 2!} = \frac{26 \times 25 \times 24!}{24! \times 2} = 25 \times 13$$

2 ــ اختيار مسؤول ثم نائب له هو ترتيبة لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها $A_{26}^{2} = 26 \times 25$

التمرين ــ 13

في لعبة الرهان الرياضي يختار المشارك 6 أرقام من بين 49 رقما (كرات مرقمة من 1 إلى 49)

1 ــ ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

2 ــ استنتج احتمال فوز المشارك بسحب 6 أرقام صحيحة .

الحــل ــ 13

1 ــ عدد الحالات الممكنة هو $C_{49}^{6} = \frac{49!}{43! \times 6!} = \frac{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}{6!}$

2 ــ من بين الحالات الممكنة يوجد حالة واحدة فقط تحمل 6 أرقام صحيحة .

إذن : الاحتمال المطلوب هو : $\frac{1}{C_{49}^{6}} = \frac{6!}{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}$

التمرين ــ 14

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كمايلي : 4 كرات سوداء و 6 كرات بيضاء

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد . فما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على :

a) كرة بيضاء b) كرة بيضاء على الأقل

c) 3 كرات ليست من نفس اللون

نضيف إلى هذا الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون

1 ــ أثبت أن من أجل $n \in IN^*$: $X_n = (n+4)^2(n+6)$

2 ــ كم نضيف من كرة سوداء و بيضاء حتى يكون $X_n = 2016$

الحــل ـــ 14

a) سحب كرة بيضاء هي الحادثة : كرة بيضاء و كرتين سوداوين

منه الحالات الممكنة هو $C_6^1 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$

b) سحب كرة بيضاء على الأقل هو عدد كل الحالات الممكنة ماعدا الحالات التي تكون فيها كل الكرات سوداء إذن عددها هو :

$$C_{10}^3 - C_4^3 = \frac{10\,!}{7\,! \times 3\,!} - \frac{4\,!}{1 \times 3\,!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{3 \times 2} - 4 = 120 - 4 = 116$$

c) لا يمكن سحب 3 كرات ليست من نفس اللون . لأن الألوان المختلفة المتوفرة هي الأسود و الأبيض فقط .

1 ـــ بعد اضافة n كرة سوداء و n كرة بيضاء تصبح الوضعية كمايلي : $(n+4)$ كرات سوداء ؛ $(n+6)$ كرات بيضاء

سحب كرتين من نفس اللون أي { إما كرتين سوداوين و كرة بيضاء
أو كرتين بيضاوين و كرة سوداء

منه :

$$X_n = C_{n+4}^2 \times C_{n+6}^1 + C_{n+6}^2 \times C_{n+4}^1$$

$$= \frac{(n+4)\,!}{(n+4-2)\,! \times 2\,!} \times (n+6) + \frac{(n+6)\,!}{(n+6-2)\,! \times 2\,!} \times (n+4)$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)\,!(n+6)}{(n+2)\,! \times 2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)\,!(n+4)}{(n+4)\,! \times 2}$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+6)}{2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{2}$$

$$= \frac{(n+4)(n+6)}{2}(n+3+n+5)$$

$$= \frac{(n+4)(n+6)(2n+8)}{2}$$

$$= (n+4)(n+6)(n+4)$$

$$= (n+4)^2(n+6)$$

2 ـــ $X_n = 2016$ يكافئ $(n+4)^2(n+6) = 2016$

لنحلل العدد 2016 كما يلي :

2016	3
672	3
224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

منه :

$$2016 = 3^2 \times 2^5 \times 7$$
$$= 3^2 \times 2^4 \times 2 \times 7$$
$$= 3^2 \times 4^2 \times 14$$
$$= (3 \times 4)^2 \times 14$$
$$= (8+4)^2 \times (8+6)$$

بالمطابقة مع عبارة $X_n = (n+4)^2(n+6)$ نحصل على $n = 8$

إذن : يكفي اضافة 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء

التمرين ـــ 15

يحتوي صندوق على 15 كرات موزعة كمايلي :

6 بيضاء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3

5 خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2

4 حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 3 ، 3 ، 3

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد .

أحسب عدد الحالات الملائمة للحوادث التالية :

A) سحب 3 كرات من نفس اللون .

B) سحب 3 كرات تحمل نفس الرقم

C) سحب 3 كرات مجموع أرقامها 6

D) سحب أحد الأرقام الفردية على الأقل .

الحـل – 15

A) الحادثة 3 كرات من نفس اللون توافق الحادثة 3 كرات بيضاء أو 3 كرات خضراء أو 3 كرات حمراء

إذن : عدد الحالات الملائمة هو :

$$C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = \frac{6\,!}{3\,!3\,!} + \frac{5!}{3\,!2\,!} + 4 = 20 + 10 + 4 = 34$$

B) الحادثة 3 كرات تحمل نفس الرقم توافق الحادثة 3 كرات تحمل الرقم 1 أو 3 كرات تحمل الرقم 2 أو 3 كرات تحمل الرقم 3

إذن : عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي :

$$C_6^3 + C_4^3 + C_5^3 = 20 + 4 + 10 = 34$$

C) الحادثة 3 كرات مجموع أرقامها 6 توافق الحادثة : سحب الأرقام $\{3\,;2\,;1\}$ أو $\{2\,;2\,;2\}$ منه عدد الحالات الملائمة للحادثة هي : $C_6^1 \times C_4^1 \times C_5^1 + C_4^3 = 6 \times 4 \times 5 + \frac{4\,!}{3\,!} = 120 + 4 = 124$

D) الحادثة " أحد الأرقام على الأقل فردي" توافق الحادثة العكسية للحادثة سحب كل الأرقام زوجية منه عدد الحالات الملائمة لهذه الجادثة هو : $C_{15}^3 - C_4^3 = \frac{15\,!}{12\,!\,3\,!} - \frac{4\,!}{3\,!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} - 4 = 485 - 4 = 481$

التمرين – 16

يتنافس 10 لاعبين في دورة كرة تنس الطاولة بكم طريقة مختلفة يمكن تنظيم الدور الأول (5 مباريات)

الحـل – 16

نرقم اللاعبين من 1 إلى 10 و نوزعهم على شكل ثنائيات للتنافس كمايلي : $(1\,;2)$ ؛ $(3\,;4)$ ؛ $(5\,;6)$ ؛ $(7\,;8)$ ؛ $(9\,;10)$

اللاعب الأول يمكن أن يتنافس مع 9 لاعبين (ماعدا نفسه)

اللاعب الثالث يمكن أن يتنافس مع 7 لاعبين (ماعدا نفسه و اللاعبين السابقين)

اللاعب الخامس يمكن أن يتنافس مع 5 لاعبين (ماعدا نفسه و اللاعبين الأربعة الأوائل)

اللاعب السابع يمكن أن يتنافس مع 3 لاعبين (ماعدا نفسه و اللاعبين الستة الأوائل)

اللاعب التاسع يمكن أن يتنافس مع لاعب واحد فقط (ماعدا نفسه و 8 لاعبين الأوائل)

نتيجة : يمكن اختيار مباريات الدورة الأولى بـ $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$ طريقة مختلفة أي 945 طريقة مختلفة .

مثال : في حالة أربعة لاعبين فقط نحصل على عدد الطرق المختلفة هو : $3 = 1 \times 3$ كمايلي :

الطريقة الأولى : A ينافس B و C ينافس D

الطريقة الثانية : A ينافس C و B ينافس D

الطريقة الثالثة : A ينافس D و B ينافس C

التمرين – 17

من بين 5 جزائريين و 10 سعوديين و 10 فلسطنيين نختار 3 شخصيات من جنسيات مختلفة فما هو عدد الثلاثيات الممكنة ؟

الحـل – 17

الأشخاص من جنسيات مختلفة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $C_5^1 \times C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 5 \times 10 \times 10 = 500$

التمرين – 18

يحتوي صندوق على 49 كرية مرقمة من 1 إلى 49 منها 6 كرات حمراء و 43 كرات بيضاء .

نسحب في آن واحد 6 كرات .

1 – ما هو عدد الحالات الممكنة

2 – ما هو عدد الحالات الملائمة للحصول على 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء

الحـل – 18

1 – سحب في آن واحد إذن : الحالات الممكنة هي توفيقات لـ 6 عناصر من بين 49 عنصر و عددها

$$C_{49}^6 = \frac{49\,!}{43\,! \times 6!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6\,!}$$

2 – سحب 3 كرات حمراء من بين 6 و 3 كرات بيضاء من بين 43 :

$$C_6^3 \times C_{43}^3 = \frac{6\,!}{3\,!3\,!} \times \frac{43\,!}{40\,! \times 3\,!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \times \frac{43 \times 42 \times 41}{3 \times 2} = 20 \times 43 \times 7 \times 41$$

التمرين – 19

نضع بين يدي طفل ثلاث أقلام ملونة أخضر ، أحمر ، أصفر . نطلب من الطفل تلوين الأوجه الستة لعلبة مكعبة الشكل .
بكم طريقة مختلفة يمكن التلوين ؟

الحـل – 19

توزيع الألوان على الأوجه الستة هو قوائم ذات 6 عناصر من بين 3 عناصر حيث يمكن استعمال لون واحد للأوجه الستة معا
منه عدد الطرق المختلفة هو $3^6 = 729$

التمرين – 20

يتكون قسم من 18 تلميذ و 12 تلميذة
نريد تشكيل لجنة مكونة من رئيس ، نائب ، أمين (3 أشخاص مختلفة)
1 – ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها
2 – ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية :
A) الأمين تلميذة
B) التلميذ X موجود في اللجنة
C) الرئيس تلميذ و الأمين تلميذة
D) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين

الحـل – 20

1 – عدد اللجان هو تراتيب لـ 3 عناصر من بين 30 عنصر و عددها $A_{30}^3 = 30 \times 29 \times 28$
2 – لتكن اللجنة مكونة كمايلي :

S	V	P
أمين	نائب	رئيس

A) الأمين تلميذة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $12 \times A_{29}^2 = 29 \times 28 \times 12$

B) التلميذ X موجود في اللجنة : هي الحادثة العكسية للحادثة التلميذ X غير موجود في اللجنة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $A_{30}^3 - A_{29}^3 = 30 \times 29 \times 28 - 29 \times 28 \times 27 = 29 \times 28 \times 3$

C) الرئيس تلميذ و الأمين تلميذة : عدد الحالات الممكنة هو : $18 \times 28 \times 12$

D) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين إذن :
إما الرئيس تلميذ و النائب تلميذة
أو الرئيس تلميذة و النائب تلميذ

منه عدد الحالات الممكنة : $18 \times 12 \times 28 + 12 \times 18 \times 28 = 2 \times 12 \times 18 \times 28$

التمرين – 21

أوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

a) $C_n^3 = 56$ c) $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8\,n$

b) $9\,C_n^2 = 2\,C_{2n}^2$

الحـل – 21

a) $C_n^3 = 56$ يكافئ
$$\begin{cases} n \geq 3 \\ \dfrac{n\,!}{(n-3)!\,3\,!} = 56 \;......... (1) \end{cases}$$

(1) تكافئ $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\,!} = 56$

تكافئ $n(n-1)(n-2) = 56 \times 3\,!$

تكافئ $n(n-1)(n-2) = 8 \times 7 \times 6$

تكافئ $n = 8$

نتيجة : $8 > 3$ إذن : $C_n^3 = 56$ من أجل $n = 8$

b) $9\,C_n^2 = 2\,C_{2n}^2$ يكافئ
$$\begin{cases} n \geq 2\ ;\ 2\,n \geq 2 \\ 9 \times \dfrac{n\,!}{(n-2)!\,2\,!} = 2 \times \dfrac{(2\,n)\,!}{(2\,n-2)\,!\,2\,!} \ .... (1) \end{cases}$$

(1) تكافئ $\dfrac{9 \times n\,!}{(n-2)\,!} = \dfrac{2 \times (2\,n)\,!}{(2\,n-2)\,!}$

تكافئ $9 \times n(n-1) = 2 \times 2\,n(2\,n-1)$

تكافئ $9\,n^2 - 9\,n = 8\,n^2 - 4\,n$

تكافئ $n^2 - 5\,n = 0$

تكافئ $n = 0$ مرفوض لأن $2\,n \geq 2$ أو $n = 5$ مقبول

نتيجة : $9\,C_n^2 = 2\,C_{2n}^2$ من أجل $n = 5$

c) $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8\,n$ يكافئ
$$\begin{cases} n \geq 3\ ;\ 2\,n \geq 2 \\ \dfrac{n\,!}{(n-3)!\,3\,!} + \dfrac{(2\,n)\,!}{(2\,n-2)\,!\,2\,!} = 8\,n \ .... (1) \end{cases}$$

(1) تكافئ $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} + \dfrac{2\,n(2\,n-1)}{2} = 8\,n$

تكافئ $n(n-1)(n-2) + 3 \times 2\,n(2\,n-1) = 6 \times 8\,n$

تكافئ $n(n^2 - 3\,n + 2) + 12\,n^2 - 6\,n = 48\,n$

تكافئ $n^3 - 3\,n^2 + 2\,n + 12\,n^2 - 6\,n - 48\,n = 0$

تكافئ $n^3 + 9\,n^2 - 52\,n = 0$

تكافئ $n(n^2 + 9\,n - 52) = 0$

تكافئ $n^2 + 9\,n - 52 = 0$ لأن $n \neq 0$

$\Delta = 81 + 208 = 289 = (17)^2$

مرفوض $n_1 = \dfrac{-9-17}{2} = -8$

مقبول $n_2 = \dfrac{-9+17}{2} = 4$

نتيجة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8\,n$ من أجل $n = 4$

التمرين ــ 22

n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq 2$ و $n - 2 \geq m$

أثبت صحة المساواة التالية :

1 ــ $C_{2n}^{n} = 2\,C_{2n-1}^{n-1}$

2 ــ $C_n^m = C_{n-2}^{m-2} + 2\,C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m}$

الحل ــ 22

1 ــ
$$2\,C_{2n-1}^{n-1} = 2 \times \frac{(2\,n-1)\,!}{(2\,n-1-n+1)\,!\,(n-1)\,!}$$
$$= 2 \times \frac{(2\,n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)!}$$
$$= 2 \times \frac{(2\,n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)!} \times \frac{2\,n}{2\,n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}$$

و هو المطلوب $= C_{2n}^{n}$

2 –

$$C_{n-2}^{m-2} + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m} = C_{n-2}^{m-2} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m}$$

$$= C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}$$

$$= C_{n}^{m}$$

ملاحظة : استعملنا خاصية مثلث باسكال : $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = C_{n}^{m}$

التمرين – 23

حل في IN^2 الجمل التالية ذات المجهولين x و y

1 – $\begin{cases} C_{x+1}^{y} = C_{x}^{y-1} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \end{cases}$ **2 –** $\begin{cases} 2C_{x}^{2} = C_{y}^{1} \\ C_{x+y-5}^{2} = 4 \end{cases}$

الحـل – 23

1 – $\begin{cases} C_{x+1}^{y} = C_{x}^{y-1} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y-1 \geq 0 \\ x+1 \geq y \\ x+y \geq 2 \\ x \geq y-1 \\ C_{x+1}^{y} = C_{x}^{y-1} \text{ .... (1)} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \text{ .... (2)} \end{cases}$

(2) تكافئ $\frac{(x+y)!}{(x+y-2)!\,2!} = 10$

تكافئ $\frac{(x+y)(x+y-1)}{2} = 10$

تكافئ $(x+y)(x+y-1) = 20$

تكافئ $x+y=5$ لأن التحليل الممكن لــ 20 من الشكل $n(n-1)$ هو 5×4

(1) تكافئ $\frac{(x+1)!}{(x-y+1)!\,y!} = \frac{x!}{(x-y+1)!\,(y-1)!}$

تكافئ $\frac{(x+1)!}{y!} = \frac{x!}{(y-1)!}$

تكافئ $\frac{(x+1)\,x!}{y\,(y-1)!} = \frac{x!}{(y-1)!}$

تكافئ $\frac{x+1}{y} = 1$

تكافئ $x+1 = y$

تكافئ $x-y = -1$

نتيجة : $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ منه بالجمع : $2x = 4$ أي $x = 2$

بالتعويض في أحد المساواة : $x+y=5$ أي $2+y=5$ منه $y=3$

خلاصة : $x = 2$ و $y = 3$

يكفي إذن أن نتأكد أن كل الشروط محققة كمايلي :

$$\begin{cases} y-1>0 & : \text{إذن } y-1 = 3-1 = 2 \\ x+1 \geq y & : \text{إذن } x+1 = 2+1 = 3 \\ x+y>2 & : \text{إذن } x+y = 3+2 = 5 \\ x \geq y-1 & : \text{إذن } y-1 = 3-1 = 2 \end{cases}$$

منه كل الشروط محققة

إذن : حلول الجملة هي $\{(2 ; 3)\}$

2 – $\begin{cases} 2\,C_x^2 = C_y^1 \\ C_{x+y-5}^2 = 4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y \geq 1 \ ; \ x \geq 2 \\ x+y-5 \geq 2 \\ 2\,C_x^2 = C_y^1 \ \ldots\ldots\ (1) \\ C_{x+y-5}^2 = 4 \ \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$

(1) تكافئ $\dfrac{2(x\,!)}{(x-2)!\,2\,!} = y$

تكافئ $\dfrac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)\,!} = y$

تكافئ $x(x-1) = y$

(2) تكافئ $\dfrac{(x+y-5)\,!}{(x+y-7)\,!\,2!} = 4$

تكافئ $\dfrac{(x+y-5)(x+y-6)(x+y-7)!}{(x+y-7)\,!\times 2\,!} = 4$

تكافئ $(x+y-5)(x+y-6) = 8$

نتيجة : $\begin{cases} x(x-1) = y \\ (x+y-5)(x+y-6) = 8 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x^2 = x+y \\ (x+y-5)(x+y-6) = 8 \ \ldots\ldots(\alpha) \end{cases}$

نعوض $x+y$ بـ x^2 في المساواة (α) فنحصل على : $(x^2-5)(x^2-6) = 8$

منه $x^4 - 11\,x^2 + 30 = 8$

أي : $x^4 - 11\,x^2 + 22 = 0$

نضع $x^2 = \alpha$ حيث $\alpha \geq 0$ منه المعادلة تصبح $\alpha^2 - 11\,\alpha + 22 = 0$

$\Delta = 121 - 88 = 33$ ليس جذر تام

منه : المعادلة لا تقبل حلول طبيعية إذن : الجملة لا تقبل حلولا في IN^2 .

التمرين – 24

x ، y عددان حقيقيان . باستعمال دستور ثنائي الحد أنشر العبارات التالية :

1 – $(1+x)^4$ 2 – $(2-x)^5$ 3 – $(2\,x+1)^6$

الحل – 24

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

1 – $(1+x)^4 = C_4^0\ x^4 + C_4^1 x^3 + C_4^2\ x^2 + C_4^3\ x + C_4^4$

$= x^4 + 4\,x^3 + 6\,x^2 + 4\,x + 1$

2 –
$$(2-x)^5 = [2+(-x)]^5$$
$$= C_5^0\,(-x)^5(2)^0 + C_5^1(-x)^4(2) + C_5^2\,(-x)^3(2)^2 + C_5^3\,(-x)^2(2)^3 + C_5^4\,(-x)(2)^4 + C_5^5\,(2)^5$$
$$= -x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$$

3 –
$$(2x+1)^6 = C_6^0\,(2x)^0 + C_6^1(2x)^1 + C_6^2\,(2x)^2 + C_6^3\,(2x)^3 + C_6^4\,(2x)^4 + C_6^5\,(2x)^5 + C_6^6\,(2x)^6$$
$$= 1 + 12x + 15\times 4x^2 + 20\times 8x^3 + 15\times 16x^4 + 6\times 32x^5 + 64x^6$$
$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$$

التمرين – 25

i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و عمدته $\pi/2$

أحسب $(2-i)^7$ و $(2+i)^7$ ثم استنتج أن العدد $(2-i)^7+(2+i)^7$ حقيقي

الحـل – 25

باستعمال دستور ثنائي الحد لدينا :

$$(2+i)^7 = 2^7 + 7i(2)^6 + 21(i)^2(2)^5 + 35(i)^3(2)^4 + 35(i)^4(2)^3 + 21(i)^5(2)^2 + 7(i)^6(2) + (i)^7$$
$$= 2^7 + 7\times 64i - 21\times 32 - 35\times 16i + 35\times 8 + 21\times 4i - 14 - i$$
$$(2-i)^7 = [2+(-i)]^7$$
$$= 2^7 + 7(-i)(2)^6 + 21(-i)^2(2)^5 + 35(-i)^3(2)^4 + 35(-i)^4(2)^3 + 21(-i)^5(2)^2 + 7(-i)^6(2) + (-i)^7$$
$$= 2^7 - 7\times 64i - 21\times 32 + 35\times 16i + 35\times 8 - 21\times 4i - 14 + i$$

النتيجة :
$$(2+i)^7 + (2-i)^7 = 2[2^7 - 21\times 32 + 35\times 8 - 14]$$

إذن : العدد $(2+i)^7+(2-i)^7$ حقيقي

التمرين – 26

n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب المجاميع التالية بدلالة n .

a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 3^k \times 5^{n-k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, C_n^k$

d) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$

الحـل – 26

a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 3^k \times 5^{n-k} = (3+5)^n = 8^n$

b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k \times (1)^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (-1)^k\, (1)^{n-k} = (1-1)^n = 0$

d) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (1)^k\, (1)^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

التمرين – 27

m و n عددان طبيعيان حيث $n \geq m \geq 1$

1 – أثبت أن $m\,C_n^m = n\,C_{n-1}^{m-1}$ ثم أحسب $A = 1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + m\,C_n^m + \dots + n\,C_n^n$

2 – أثبت أن : $m\,C_{n+1}^m = (n+1)\,C_n^{m-1}$ ثم أحسب B حيث

$$B = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{m+1}C_n^m + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

الحـل – 27

1 –
$$n\,C_{n-1}^{m-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(n-m)!\,(m-1)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!\,(m-1)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!\,(m-1)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

$= m\, C_n^m$ و هو المطلوب

$$A = 1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + m\, C_n^m + (m+1)\, C_n^{m+1} + \dots + (n-1)\, C_n^{n-1} + n\, C_n^n$$

$= 1 + n\, C_{n-1}^1 + n\, C_{n-1}^2 + \dots + n\, C_{n-1}^{m-1} + n\, C_{n-1}^m + \dots + n\, C_{n-1}^{n-2} + n\, C_{n-1}^{n-1}$ لأن $m\, C_n^m = n\, C_{n-1}^{m-1}$

$= 1 + n(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1})$ حسب السؤال (1)

$$= 1 + n\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k$$

$$= 1 + n\,[2^{n-1} - 1]$$

$$= 1 - n + n \times 2^{n-1}$$

تحقيق : من أجل $n = 2$: $A = 1 + 2\, C_2^2 = 1 + 2 = 3$

من جهة أخرى : $1 - 2 + 2 \times 2^1 = -1 + 4 = 3$

ملاحظة :

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k - 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1)^k (1)^{n-k} - 1$$

$$= (1+1)^{n-1} - 1$$

$$= 2^{n-1} - 1$$

2 –

$$(n+1) \times C_n^{m-1} = (n+1) \times \frac{n!}{(n-m+1)!\,(m-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!\,(m-1)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!\, m!}$$

$= m\, C_{n+1}^m$ و هو المطلوب

لدينا : $m\, C_{n+1}^m = (n+1)\, C_n^{m-1}$ منه $C_{n+1}^m = \frac{n+1}{m} C_n^{m-1}$

أي $\frac{1}{n+1} C_{n+1}^m = \frac{1}{m} C_n^{m-1}$

$$B = 1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{m+1} C_n^m + \dots + \frac{1}{n} C_n^{n-1} + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{m+1} + \dots + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^n + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1})$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1 - C_{n+1}^1)$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}[2^{n+1} - 1 - (n+1)]$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

ملاحظة : استعملنا المساواة :

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$$

إذن : $1 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$

منه : $C^2_{n+1} + C^3_{n+1} + ... + C^{n+1}_{n+1} = 2^{n+1} - 1 - C^1_{n+1}$

تحقيق : من أجل $n = 2$

$$B = 1 + \frac{1}{2} C^1_2 + \frac{1}{3} C^2_2 = 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

من جهة أخرى : $\frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}$

التمرين – 28

n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq m > 0$

1 – أثبت أن $C^m_n = C^{m-1}_{n-1} + C^m_{n-1}$

2 – استنتج أن $C^m_m + C^m_{m+1} + ... + C^m_n = C^{m+1}_{n+1}$

الحـل – 28

– 1

$$C^{m-1}_{n-1} + C^m_{n-1} = \frac{(n-1)\,!}{(n-m)\,!\,(m-1)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{(n-m-1)\,!\,m!}$$

$$= \frac{(n-1)\,!}{(n-m)\,!\,(m-1)\,!} \times \frac{m}{m} + \frac{(n-!)\,!}{(n-m-1)\,!\,m!} \times \frac{(n-m)}{(n-m)}$$

$$= \frac{m(n-1)\,!}{(n-m)!\,m\,!} + \frac{(n-m)(n-1)\,!}{(n-m)!\,m\,!}$$

$$= \frac{(n-1)\,!\,[m+n-m]}{(n-m)!\,m\,!}$$

$$= \frac{n(n-1)\,!}{(n-m)!\,m\,!}$$

$$= \frac{n\,!}{(n-m)!\,m\,!}$$

$= C^m_n$ وهو المطلوب

2 – حسب السؤال الأول لدينا مايلي :

$$\begin{aligned}
\oplus\quad & C^{m+1}_{n+1} = C^m_n + C^{m+1}_n \\
& C^{m+1}_n = C^m_{n-1} + C^{m+1}_{n-1} \\
\oplus\quad & C^{m+1}_{n-1} = C^m_{n-2} + C^{m+1}_{n-2} \\
& \vdots \\
\oplus\quad & C^{m+1}_{m+3} = C^m_{m+2} + C^{m+1}_{m+2} \\
\oplus\quad & C^{m+1}_{m+2} = C^m_{m+1} + C^{m+1}_{m+1}
\end{aligned}$$

بجمع هذه المساواة طرف لــ طرف تحصل على :

$$C^{m+1}_{n+1} = C^m_n + C^m_{n-1} + C^m_{n-2} + ... + C^m_{m+2} + C^m_{m+1} + C^{m+1}_{m+1}$$

أي : $C^{m+1}_{n+1} = C^m_n + C^m_{n-1} + ... + C^m_{m+1} + C^m_m$ لأن $C^{m+1}_{m+1} = C^m_m = 1$

التمرين – 29

ليكن المنشور $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ حيث $x \in IR^*$

1 – أكتب الحد الذي درجته 10

2 – أوجد معامل الحد التاسع

3 – أوجد الحد الثابت

الحل ــ 29

$$\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} x^{3k} (-1)^{15-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^{15-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} x^{3k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{2k-30}$$
$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{3k+2k-30}$$
$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{5k-30}$$

1 ــ الحد ذو الدرجة 10 من أجل : $5k - 30 = 10$

أي : $5k = 40$ منه $k = 8$

إذن : الحد هو : $C_{15}^{8} (-1)^{15-8} (2)^{15-8} x^{10}$

$$C_{15}^{8} = \frac{15\,!}{7\,!\,8\,!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 6435$$

منه : الحد ذو الدرجة 10 هو : $- 6435 \times 2^7 x^{10} = - 823680\, x^{10}$

2 ــ الحد التاسع هو الحد ذو $k = 8$ (لأن k يأخذ القيم من 0 إلى 15)

منه الحد هو : $- 823680\, x^{10}$ أي معامل الحد التاسع هو $- 823680$

3 ــ يكون الحد ثابت من أجل : $5k - 30 = 0$ أي $k = 6$

منه الحد الثابت هو : $C_{15}^{6} (-1)^{15-6} (2)^{15-6}$

$$C_{15}^{6} = \frac{15\,!}{9\,!\,6\,!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 5005$$

منه الحد الثابت هو: $- 5005 \times 2^9 = - 2562560$

التمرين ــ 30

n عدد طبيعي غير معدوم . ليكن المنشور $(1 + x)^n$ حيث $x \in IR$

1 ــ عين قيمة n حتى يكون الحد الثالث في المنشور هو $28\, x^2$

2 ــ من أجل قيمة n المحصل عليها عين x حتى يكون الحد الخامس هو 1120

3 ــ نضع $n = 15$

عين قيمة العدد الطبيعي m حتى يكون الحدان اللذان رتبتاهما $(m - 1)$ و $(2m + 3)$ متساويي المعامل .

الحل ــ 30

1 ــ $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

الحد الثالث من أجل $k = 2$ هو : $C_n^2\, x^2$

إذن : $C_n^2\, x^2 = 28\, x^2$ يكافئ $C_n^2 = 28$

يكافئ $\frac{n\,!}{(n-2)!\,2\,!} = 28$

يكافئ $\frac{n(n-1)}{2} = 28$

يكافئ $n(n-1) = 56$

يكافئ $n^2 - n - 56 = 0$

$\Delta = 1 + 224 = 225 = (15)^2$

$n_1 = \frac{1 - 15}{2} = -7$ مرفوض

$n_2 = \frac{1 + 15}{2} = 8$ مقبول

نتيجة : $n = 8$

2 ـ من أجل $n = 8$ الحد الخامس هو $C_8^4\, x^4 = \frac{8\,!}{4\,!4\,!}\, x^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2}\, x^4 = 70\, x^4$

إذن : $70\, x^4 = 1120$ يكافئ $x^4 = 16$

يكافئ $x = \sqrt[4]{16}$

يكافئ $x = -2$ أو $x = 2$

نتيجة : توجد قيمتين لـ x حتى يكون الحد الخامس هو 1120 و هما $\{2 ; -2\}$

3 ـ من أجل $n = 15$

الحد ذو الرتبة $m - 1$ من أجل $k = m - 2$ هو $C_{15}^{m-2} x^{m-2}$

الحد ذو الرتبة $2\,m + 3$ من أجل $k = 2\,m + 2$ هو $C_{15}^{2m+2}\; x^{2m+2}$

إذن : $C_{15}^{m-2} = C_{15}^{2m+2}$ يكافئ $m - 2 = 2\,m + 2$ أو $m - 2 = 15 - (2\,m + 2)$ أو $2\,m + 2 = 15 - (m - 2)$

يكافئ $-m = 4$ أو $m - 2 = 15 + 2\,m + 2$ أو $2\,m + 2 = 17 - m$

يكافئ $m = -4$ مرفوض أو $m = -19$ مرفوض أو $m = 5$

يكافئ $m = 5$

التمرين ـ 31

ليكن X المتغير العشوائي المعرف كما يلي :

α	-1	2	3	4
$p(X = \alpha)$	1/3	1/4	1/5	a

1 ـ عين قيمة العدد الحقيقي a

2 ـ أحسب $P(X \geq 5/2)$ ثم $P(X < 1)$

3 ـ أحسب $p(X^2 \leq 2)$

4 ـ أحسب $p(X^2 - 6\,X + 8 < 0)$

الحـل ـ 31

1 ـ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + a = 1$ منه $\frac{20 + 15 + 12}{60} + a = 1$

أي : $\frac{47}{60} + a = 1$

أي : $a = 1 - \frac{47}{60}$

أي : $a = \frac{13}{60}$

2 ـ $p(X \geq 5/2) = p(X = 3) + p(X = 4)$

$= \frac{1}{5} + a$

$$= \frac{1}{5} + \frac{13}{60}$$
$$= \frac{25}{60}$$
$$= \frac{5}{12}$$

$$p(X < 1) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$$

3 ـ $p(X^2 \leq 2) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$

4 ـ

X	-1	2	3	4
X^2	1	4	9	16
$-6X$	6	-12	-18	-24
$X^2 - 6X + 8$	15	0	-1	0

نتيجة : $p(X^2 - 6X + 8 < 0) = p(X = 3) = \frac{1}{5}$

التمرين ـ 32

يحتوي كيس على 5 كرات تحمل الرقم 10 و 3 كرات تحمل الرقم 15
نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس
X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المسحوبين .
1 ـ ما هي القيم الممكنة للمتغير X
2 ـ عرف قانون احتمال المتغير X
3 ـ أحسب E(X) الأمل الرياضياتي للمتغير X
4 ـ أحسب التباين Var(X)
5 ـ أحسب $p(X \geq 25)$

الحــل ـ 32

1 ـ

⊕	10	15
10	20	25
15	25	30

إذن : القيم الممكنة لــ X هي {30 ; 25 ; 20}

2 ـ عدد الحالات الممكنة للسحب $C_8^2 = \frac{8\,!}{6\,!2\,!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 10 : $C_5^2 = \frac{5\,!}{3\,!2\,!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 15 : $C_3^2 = \frac{3\,!}{2\,!} = 3$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرة تحمل 15 و أخرى تحمل 10 : $C_5^1 \times C_3^1 = 5 \times 3 = 15$

منه : $p(X = 20) = 10/28$ ؛ $p(X = 25) = 15/28$ ؛ $p(X = 30) = 3/28$

إذن : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

α	20	25	30
$p(X = \alpha)$	10/28	15/28	3/28

3 ـ $E(X) = 20\left(\frac{10}{28}\right) + 25\left(\frac{15}{28}\right) + 30\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{200 + 375 + 90}{28} = 23{,}75$

4 ـ $Var(x) = \frac{10}{28}(3{,}75)^2 + \frac{15}{28}(1{,}25)^2 + \frac{3}{28}(6{,}25)^2 = 10{,}04$

5 ـ $p(X \geq 25) = p(X = 25) + p(X = 30)$

$$= \frac{15}{28} + \frac{3}{28}$$

$$= \frac{18}{28}$$

$$= \frac{9}{14}$$

التمرين ــ 33

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 3 كرات سوداء مرقمة 1 ، 2 ، 3 .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق الكرة البيضاء بالرقم (1+) و الكرة السوداء بـــ 0

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة الرقم الذي تحمله .

1 ــ عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 ــ أحسب E(X) و E(Y)

3 ــ أثبت أن المتغيران X و Y مستقلان

4 ــ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي T حيث T = X Y ثم أحسب E(T)

الحـل ــ 33

1 ــ القيم الممكنة لـــ X هي {0 ; 1}

$p(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

القيم الممكنة لـــ Y هي {1 ; 2 ; 3}

$p(Y = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(Y = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(Y = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Y_i	1	2	3
$p(Y = Y_i)$	1/3	1/3	1/3

2 ــ

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

3 ــ

$p(X = 0 ; Y = 1) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 0 ; Y = 2) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 0 ; Y = 3) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 1) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 2) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 3) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

النتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ ، من أجل كل $k \in \{1 ; 2 ; 3\}$

$p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i ; Y = k)$ إذن : المتغيران X و Y مستقلان

4 ــ نضع $T = X Y$ إذن : القيم الممكنة لــ T هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

T_i	0	1	2	3
$p(T = T_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

منه : $E(T) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1$

التمرين ــ 34

يحتوي كيس على 4 كرات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، a حيث $a \in IN$
نسحب كرة واحدة من الكيس . نضع P_k احتمال سحب الكرة ذات الرقم k (السحب ليس متساوي الاحتمال)
1 ــ أحسب P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a علما أنها بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$
2 ــ ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل كرة مسحوبة بالرقم الذي تحمله . أوجد قيمة العدد الطبيعي a حتى يكون الأمل الرياضياتي للمتغير F هو $E(F) = \frac{43}{9}$

الحــل ــ 34

1 ــ $P_a + P_3 + P_2 + P_1 = 1$ إذن : $P_1 + \left(P_1 + \frac{1}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{2}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{3}{18}\right) = 1$

أي : $4 P_1 + \frac{6}{18} = 1$

أي : $4 P_1 = 1 - \frac{1}{3}$

أي : $P_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

نتيجة : $P_1 = \frac{1}{6}$

$P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$P_3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$

$P_a = \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

2 ــ قانون المتغير العشوائي F هو كمايلي :

F_i	1	2	3	a
$P(F = F_i)$	1/6	2/9	5/18	1/3

$E(F) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{2}{9}\right) + 3\left(\frac{5}{18}\right) + a\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{15}{18} + \frac{a}{3}$

$= \frac{3+8+15}{18} + \frac{a}{3}$

$= \frac{26}{18} + \frac{a}{3}$

$= \frac{13}{9} + \frac{a}{3}$

نتيجة : $E(F) = \frac{43}{9}$ يكافئ $\frac{13}{9} + \frac{a}{3} = \frac{43}{9}$

يكافئ $\frac{a}{3} = \frac{43}{9} - \frac{13}{9}$

يكافئ $\frac{a}{3} = \frac{30}{9}$

يكافئ $9a = 90$

يكافئ $a = 10$

التمرين ــ 35

يحتوي كيس على 20 كرات مرقمة من 1 إلى 20 لا نفرق بيها عند اللمس

I) نسحب من الكيس كرة واحدة . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) الحصول على مضاعف 4

B) كرة تحمل عددا ليس مضاعفا 5

II) نسحب من الكيس كرتين في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) كرتين تحملان مضاعفا لــ 4

B) كرة تحمل مضاعف 3 و أخرى تحمل مضاعف 4

III) نسحب الآن 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) ثلاث كرات مضاعفات 4

B) ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي

الحــل ــ 35

I) مضاعفات 4 هي $\{20 ; 16 ; 12 ; 8 ; 4\}$

الأرقام غير مضاعفات 5 هي $\{19 ; 18 ; 17 ; 16 ; 14 ; 13 ; 12 ; 11 ; 9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1\}$

نتيجة :

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

II) عدد الحالات الممكنة هو $C_{20}^{2} = \frac{20\,!}{18!2\,!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$

مضاعفات 4 : $\{20 ; 16 ; 12 ; 8 ; 4\}$

مضاعفات 3 : $\{18 ; 15 ; 12 ; 9 ; 6 ; 3\}$

نتيجة :

$$P(A) = \frac{C_5^2}{190} = \frac{\frac{5\,!}{3\,!2\,!}}{190} = \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{190} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$$

لاحظ أن العدد 12 مضاعف لكل
من 3 و 4 إذن نميز 3 حالات
كمايلي :

- مضاعف 3 و مضاعف 4 مختلفين عن 12
- 12 و مضاعف 4 مختلف عن 12
- 12 و مضاعف 3 مختلف عن 12

إذن :

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_4^1}{190}$$

$$= \frac{4 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 4}{190}$$

$$= \frac{20 + 5 + 4}{190}$$

$$= \frac{29}{190}$$

III) عدد الحالات الممكنة : $C_{20}^{3} = \frac{20\,!}{17!3\,!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} = 1140$

$$P(A) = \frac{C_5^3}{1140} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$$

سحب 3 كرات مجموع أرقامها زوجي يوافق أحد الحالات التالية :
سحب 3 أرقام زوجية
سحب رقمين فرديين و رقم زوجي علما أن { عدد الأرقام الفردية هو : 10 ، عدد الأرقام الزوجية هو : 10 }
إذن :

$$P(B) = \frac{C_{10}^3 + C_{10}^2 \times C_{10}^1}{1140} = \frac{120 + 45 \times 10}{1140} = \frac{570}{1140} = \frac{57}{114} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}$$

التمرين ــ 36

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة الاحتمال موزعة كمايلي :
5 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3
3 كرات خضراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3
2 كرات حمراء تحمل الأرقام 3 ، 3
نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :
A) الحصول على كرة بيضاء و كرتين حمراوين
B) الحصول على كرة حمراء على الأقل
C) الحصول على كرات مجموع أرقامها أكبر تماما من 7

الحـل ــ 36

عدد الحالات الممكنة : $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو : $C_5^1 \times C_2^2 = 5 \times 1 = 5$

منه : $P(A) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$

عدد الحالات الملائمة للحادثة $\overline{B}$ هو $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$ (و لا كرة حمراء)

منه : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{56}{120} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$

يكون مجموع الأرقام المسحوبة أكبر تماما من 7 إذا و فقط إذا تم سحب 3 كرات تحمل الرقم 3 أو 2 كرات تحمل الرقم 3 و كرة تحمل الرقم 2

إذن : عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^3 + C_4^2 \times C_3^1 = 4 + 6 \times 3 = 22$

منه : $P(C) = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$

التمرين ــ 37

في سباق 400 متر تتابع كل فريق يتكون من 4 عدائين
يريد المدرب تشكيل فريق للمشاركة في المسابقة من بين 10 عدائين حيث يتم تحديد رتبة انطلاق كل عداء من العدائين الأربعة المشكلين للفريق
1 ــ كم من فريق مختلف يمكن للمدرب تشكيله
2 ــ ما هو احتمال أن يكون عداء ما ضمن الفريق المختار

الحـل ــ 37

1 ــ عند اختيار 4 عدائين نهتم بترتيبهم حسب الانطلاق
إذن : عدد الحالات الممكنة هي تراتيب لـ 4 عناصر من بين 10 عناصر و عددها :

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

2 ــ عدد الحالات الملائمة للحادثة "الفريق لا يضم لاعب معين" هو A_9^4 (الحادثة العكسية)

أي : $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

منه : احتمال أن يكون الفريق يضم لاعب معين هو :

$$1 - \frac{3024}{5040} = \frac{2016}{5040} = \frac{2}{5}$$

التمرين ــ 38

في ثانوية ما 25% من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15% منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10% منهم مستواهم ضعيف في مادتي الرياضيات و الفيزياء معا .
نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية .
1 ــ إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا أيضا في مادة الرياضيات ؟ .
2 ــ إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الرياضيات فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا ؟ .
3 ــ ما هو احتمال أن يكون هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء أو في مادة الرياضيات

الحــل ــ 38

لتكن الحوادث التالية :
A : التلميذ ضعيف في مادة الرياضيات
B : التلميذ ضعيف في مادة الفيزياء
1 ــ احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الرياضيات علما أنه ضعيف في الفيزياء هو :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

2 ــ احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الفيزياء علما أنه ضعيف في الرياضيات هو :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

3 ــ احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في احدى المادتين الرياضيات أو الفيزياء هو :

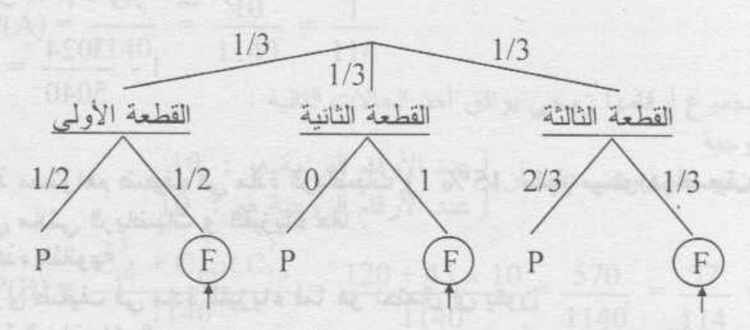
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{25}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100}$$
$$= \frac{25 + 15 - 10}{100}$$
$$= \frac{30}{100}$$
$$= \frac{3}{10}$$

التمرين ــ 39

يضم صندوق 3 قطع نقدية موزعة كمايلي :
القطعة الأولى تحمل وجه و ظهر متساويي الاحتمال
القطعة الثانية تحمل وجهين (لا تحمل ظهر)
القطعة الثالثة تحمل وجه و ظهر حيث احتمال ظهور الوجه هو 1/3
نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق ثم نرميها مرة واحدة
ما هو احتمال الحصول على وجه

الحــل ــ 39

نرمز إلى الوجه بــ F و إلى الظهر بــ P
لدينا عملية اختيار القطعة من الصندوق متساوية الاحتمال و كل منها يساوي 1/3
اذن : نرسم الشجرة التالية :



نتيجة : احتمال الحصول على الوجه F هو :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{3+6+2}{18}=\frac{11}{18}$$

ملاحظة : القطعة الثانية لا تحمل ظهر إذن $P(P) = 0$ و $P(F) = 1$

<u>التمرين ــ 40</u>

A ، B ، C ثلاث صناديق حيث :

الصندوق A مكون من 3 كرات حمراء و 5 كرات سوداء

الصندوق B مكون من 2 كرات حمراء و كرة سوداء

الصندوق C مكون من 2 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نأخذ أحد الصناديق عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة

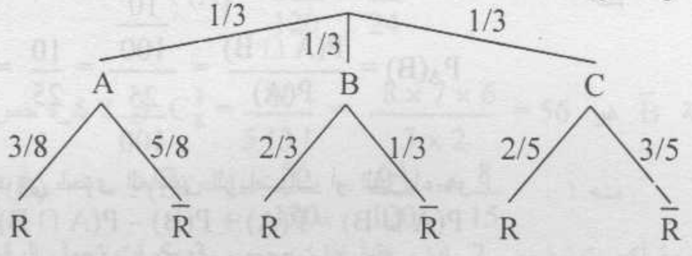
إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق A ؟

<u>الحــل ــ 40</u>

لتكن A : الحادثة اختيار الصندوق A إذن : $P(A) = 1/3$

لتكن R : الحادثة سحب كرة حمراء

لدينا الشجرة التالية :



احتمال سحب الكرة من الصندوق A علما أنها حمراء هو الاحتمال الشرطي

$$P_R(A)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}$$

لدينا :

$$p(A\cap R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{45+80+48}{120}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{173}{120}$$

نتيجة :

$$P_R(A)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{3\times 120}}=\frac{1}{8}\times\frac{3\times 120}{173}=\frac{45}{173}$$

التمرين ـــ 41

يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين
نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع
نرمز بـ B_i للحادثة الكرة المسحوبة في المرة i بيضاء
1 ـــ أحسب الاحتمال $P(B_1)$ ثم $P_{B_1}(B_2)$
2 ـــ استنتج $P(B_2 \cap B_1)$

الحــل ـــ 41

1 ـــ $P(B_1) = \frac{10}{12}$ (سحب كرة أولى بيضاء)

$P_{B_1}(B_2) = \frac{9}{11}$ (سحب كرة بيضاء في المرة الثانية علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء إذن تبقى 9 كرات بيضاء من بين 11 كرات)

2 ـــ لدينا :

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}$$

منه :

$$P(B_1 \cap B_2) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1)$$

$$= \frac{9}{11} \times \frac{10}{12}$$

$$= \frac{90}{132}$$

$$= \frac{15}{22}$$

نماذج للبكالوريـــا

التمرين ــ 1

يحتوي صندوق على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

I) نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء . C : الحصول على كرة بيضاء على الأقل

B : الحصول على 3 كرات سوداء .

II) نسحب 4 كرات في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء

B : الحصول على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء .

III) نسحب 3 كرات في آن واحد ولا نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب من الباقي 4 كرات في آن واحد .

ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاثة الأولى بيضاء و من بين الكرات الأربعة المسحوبة بعد ذلك كرة واحدة بيضاء فقط .

الحـل ــ 1

I) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^{3} = \dfrac{10!}{7!3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

$$P(A) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{1}{120} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{120 \times 3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

II) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^{4} = \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$

$$P(A) = \frac{C_6^3 \times C_4^1}{210} = \frac{20 \times 4}{210} = \frac{8}{21}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3 \times C_6^1}{210} = \frac{4 \times 6}{210} = \frac{4}{35}$$

III) احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى هو : $\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{6}$

بعد الحصول على 3 كرات بيضاء يبقى في الصندوق 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

إذن : احتمال سحب كرة واحدة بيضاء عند سحب 4 كرات في آن واحد هو :

$$\frac{C_3^1 \times C_4^3}{C_7^4} = \frac{3 \times 4}{35} = \frac{12}{35}$$

نتيجة : احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى و كرة واحدة بيضاء في المرة الثانية هو :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{12}{35} = \frac{2}{35}$$

التمرين ــ 2

يحتوي صندوق على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10

نسحب من الصندوق كرتين على التوالي مع الارجاع

1 ــ أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4

2 ــ أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10

الحــل ــ 2

عدد الحالات الممكنة للسحب هي قوائم لــ عنصرين من بين 10 عناصر و عددها $10^2 = 100$

1 ــ لتكن A الحادثة : سحب كرتين فرقهما 4

الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي (1 ، 5) ، (2 ، 6) ، (3 ، 7) ، (4 ، 8) ، (5 ، 9) ، (6 ، 10) ، (7 ، 3) ، (8 ، 4) ، (9 ، 5) ، (10 ، 6) ، (5 ، 1) ، (6 ، 2) ، (7 ، 3) ، (8 ، 4) ،
(9 ، 5) ، (10 ، 6) ، (6 ، 10) ، (5 ، 1)

منه : $P(A) = \frac{12}{100}$

2 ــ لتكن B الحادثة : سحب كرتين مجموعهما 10

الحالات الملائمة للحادثة B هي (1 ، 9) ، (2 ، 8) ، (3 ، 7) ، (4 ، 6) ، (5 ، 5) ، (6 ، 4) ، (7 ، 3) ، (8 ، 2) ،
(1 ، 9) منه $P(B) = \frac{9}{100}$

الحالات الملائمة للحادثة $A \cap B$ هي (3 ، 7) ، (7 ، 3) منه $P(A \cap B) = \frac{2}{100}$

نتيجة : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{9}{100}} = \frac{2}{9}$

التمرين ــ 3

يتكون قسم من 25 % بنات و 75 % ذكور

نفرض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيدون .

نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : أن يكون التلميذ بنتا

B : أن يكون التلميذ ولدا

C : أن يكون التلميذ جيدا

D : أن يكون التلميذ بنتا علما أنها عنصر جيد

الحــل ــ 3

$$P(A) = 25\ \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = 75\ \% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$ (بنت جيدة أو ولد جيد)

$$= \frac{25}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{75}{100} \times \frac{30}{100}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{6+9}{40}$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$P(D) = \frac{2}{5}$ منه $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{25}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{5}$

التمرين ـــ 4

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 و 3 كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين مرقمة من 9 إلى 10

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : الكرتان تحملان رقمين فرديين

B : الكرتان من نفس اللون

C : الكرتان تحملان رقمان فرديان و من نفس اللون

D : الكرتان من لونان مختلفان

E : الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين

الحـل ـــ 4

عدد الحالات الممكنة هو $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$

الألوان	بيضاء	حمراء	خضراء
الأرقام	1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5	6 ، 7 ، 8	9 ، 10
عدد الأرقام الفردية	3	1	1

$$P(A) = \frac{C_5^2}{45} = \frac{1}{45} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{45 \times 2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$P(B) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} = \frac{10+3+1}{45} = \frac{14}{45}$$

$$P(C) = \frac{C_3^2}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

لاحظ أن يوجد 3 كرات بيضاء تحمل أرقام فردية

إذن : لا يمكن سحب كرتين خضراوين أو حمراوين و تحملان أرقام فردية

$$P(D) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 + C_5^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1}{45} = \frac{5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2}{45} = \frac{31}{45}$$

$$P(E) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{45} = \frac{3 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 1}{45} = \frac{7}{45}$$

تفسير : حتى تكون الكرات مختلفة الألوان و تحمل أرقام فردية يجب أن تكون : (بيضاء فردية ، حمراء فردية) أو (بيضاء فردية ، خضراء فردية) أو (حمراء فردية ، خضراء فردية)

التمرين ـــ 5

A ، B ، C ثلاث صناديق تحتوي على كرات موزعة كمايلي :

في الصندوق A : 5 كرات بيضاء و كرة سوداء

في الصندوق B : 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

في الصندوق C : كرة بيضاء و 4 كرات سوداء

يقوم لاعب برمي زهرة نرد ذات 6 أوجه مرقمة و متساوية الاحتمال .

إذا كان الرقم الظاهر هو 1 يسحب من الصندوق A

إذا كان الرقم الظاهر 2 أو 3 يسحب من الصندوق B

إذا كان الرقم الظاهر 4 أو 5 أو 6 يسحب من الصندوق C

I) إذا كان اللاعب يسحب كرة واحدة فقط ، أحسب احتمال أن تكون بيضاء

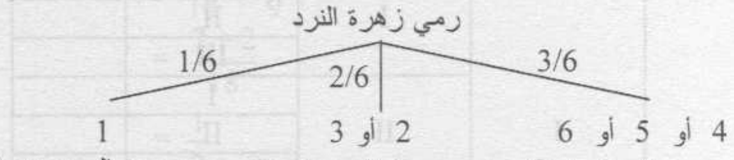
II) إذا كان اللاعب يسحب كرتان في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

X : كرتين بيضاوين

Y : كرتين سوداوين من الصندوق B .

الحـل – 5

لدينا الشجرة التالية :



II) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو مجموع ثلاث احتمالات كمايلي :

أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق A .

أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق B .

أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق C .

نتيجة : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو كمايلي :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{36} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{36} + \frac{3}{10} = \frac{25+54}{180} = \frac{79}{180}$$

II) الكرتان بيضاوين في حالتين فقط كمايلي :

كرتان بيضاوين من الصندوق A

كرتان بيضاوين من الصندوق B

منه احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو :

$$P(X) = \frac{1}{6} \times \frac{C_5^2}{C_6^2} + \frac{2}{6} \times \frac{C_3^2}{C_5^2}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{10}{15} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{19}{90}$$

كرتين سوداوين من الصندوق B : $P(Y) = \frac{2}{6} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{30}$

التمرين – 6

X و Y لاعبان لرمي الأسهم كل منهما يسدد سهمه نحو هدف دائري مقسم إلى 3 مناطق I ، II ، III . حيث كل رمية تصيب منطقة واحدة فقط من بين المناطق I ، II ، III

احتمال إصابة الرامي X للمناطق I ، II ، III هي على الترتيب 1/12 ؛ 1/3 و 7/12 أما احتمالات إصابة الرامي Y للمناطق I ، II ، III فهي متساوية .

يسدد الرامي X سهمه ثلاث مرات متتابعة . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يصيب المنطقة III في كل رمية .

B : يصيب المناطق I ، II ، III بهذا الترتيب .

C : يصيب المناطق I ، II ، III

نختار الآن أحد الراميين X أو Y علما أن احتمال اختيار الرامي X هو ضعف احتمال اختيار الرامي Y في حالة تسديد رمية واحدة ما هو احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III

الحـل ــ 6

لدينا الحالات التالية للرامي X :

الحادثة	الرمية الثالثة	الرمية الثانية	الرمية الأولى
	I	I	I
	II		
	III		
	I	II	
	II		
a	III		
	I	III	
b	II		
	III		
	I	I	II
	II		
c	III		
	I	II	
	II		
	III		
d	I	III	
	II		
	III		
	I	I	III
e	II		
	III		
f	I	II	
	II		
	III		
	I	III	
	II		
g	III		

نتيجة :

الحادثة g توافق الحادثة A منه : $P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{1728}$

الحادثة a توافق الحادثة B إذن : $P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{432}$

الحوادث a ، b ، c ، d ، e ، f توافق الحادثة C منه

$$P(C) = 6 \times \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12}\right) = \frac{6 \times 7}{432} = \frac{7}{72}$$

باختيار أحد الراميين نضع α احتمال اختيار الرامي Y

منه : $\alpha + 2\alpha = 1$ أي $\alpha = 1/3$

منه الشجرة التالية :

2/3 — الرامي X : 1/12 → I ، 1/3 → II ، 7/12 → III

1/3 — الرامي Y : 1/3 → I ، 1/3 → II ، 1/3 → III

احتمال أن تصيب الرمية المنطقة III هو :

$$P = \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{18} + \frac{1}{9} = \frac{7+2}{18} = \frac{1}{2}$$

تفسير : إما أن تكون الرمية من اللاعب X

أو تكون الرمية من اللاعب Y

التمرين ــ 7

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$ **(1).......**

1 ــ أوجد z_3 ، z_2 ، z_1 **حلول المعادلة (1) ثم أكتبها على شكلها المثلثي .**

2 ــ عين الجذور التربيعية لكل من z_1 ، z_2 ، z_3

زهرة نرد متجانسة الأوجه كل وجه منها يحمل جذرا تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) نرمي هذه الزهرة مرتين متتابعتين

3 ــ ما هو احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان ؟

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل عمليتي رمي بطويلة جداء العددين المركبين المحصل عليهما

4 ــ عرف قانون الاحتمال للمتغير X

5 ــ أحسب E(X) الأمل الرياضياتي للمغير X

الحــل ــ 7

1 ــ لاحظ أن $z_1 = i$ هو حل للمعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$

لنبحث عن الحلول الأخرى :

$$\begin{array}{l|l}
z^3 - 4z^2 + z - 4 & z - i \\
\underline{z^3 - i z^2} & z^2 + (-4+i)z - 4i \\
(-4+i)z^2 + z - 4 & \\
\underline{(-4+i)z^2 + (4i+1)z} & \\
-4iz - 4 & \\
\underline{-4iz - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

لنحل المعادلة $z^2 + (-4+i)z - 4i = 0$

$$\Delta = 16 - 8i - 1 + 16i = 15 + 8i = (4+i)^2$$

$$\begin{cases} z_2 = \dfrac{4 - i + 4 + i}{2} = 4 \\ z_1 = \dfrac{4 - i - 4 - i}{2} = -i \end{cases}$$

نتيجة : $z_1 = i$ ؛ $z_2 = 4$ ؛ $z_3 = -i$ ،

2 ــ جذور z_1 هي : $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \,;\, \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right\}$

جذور z_2 هي : $\{2 \,;\, -2\}$

جذور z_3 هي : $\left\{\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \,;\, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right\}$

3 ــ احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان هو : $P = 3 \times \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{1}{3}$

تفسير : إما نحصل على جذر z_1 ثم الجذر الآخر لــ z_1 (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_2 ثم الجذر الآخر لــ z_2 (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_3 ثم الجذر الآخر لــ z_3 (يمكن أن يكون نفسه)

ملاحظة : إذا سمينا على الترتيب a ، b ، c ، d ، e ، f الجذور التربيعية للأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، z_3
فإن الحالات الملائمة للحادثة هي :
(a ، a) ، (b ، a) ، (a ، b) ، (b ، b) ، (c ، c) ، (d ، c) ، (d ، d) ، (c ، d) ، (e ، e) ،
(f ، e) ، (f ، f) ، (e ، f) و عددها 12
و عدد الحالات الممكنة هو $6^2 = 36$

منه : الاحتمال المطلوب هو $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

4 ـ كل من الجذور التربيعية للأعداد z_1 ، z_2 ، z_3 طاولاتها على الترتيب 1 ، 2 ، 1
إذن : القيم الممكنة لـ X هي 1 ، 2 ، 4 $(|z.z'|=|z|\times|z'|)$

تفسير : نسحب في المرة الأولى أحد الجذور و في المرة الثانية
أحد الجذور حيث جداء طاولتيهما يساوي قيمة X

$$P(X=1)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=4)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

منه : قانون الاحتمال للمتغير X كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X=X_i)$	4/9	4/9	1/9

$$E(x)=\frac{4}{9}+\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{16}{9}$$

التمرين ـ 8

A و B صندوقان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :
الصندوق A : 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء
الصندوق B : 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق B
ثم نسحب من الصندوق B كرة أخرى و نسجل لونها
1 ـ ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين
2 ـ ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون
3 ـ نرفق بكل كرة بيضاء العدد الحقيقي α و كل كرة سوداء العدد $(-\alpha)$ و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الأعداد المرقمة بها
a) عرف قانون احتمال المتغير X ثم أحسب E(X) (أمله الرياضياتي)
b) عين α حتى يكون $E(X)=1$
4 ـ نضيف إلى الصندوق B $(n-3)$ كرة سوداء حيث n عدد طبيعي أكبر من 3
نعيد عملية السحب كما في السؤال (1)
a) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين .
b) عين قيمة n حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0,25

الحـل ـ 8

لدينا الشجرة التالية :

سحب من الصندوق A
- 1/2 : بيضاء (نضيفها إلى الصندوق B) ← الصندوق B يحتوي على : 8 بيضاء ، 3 سوداء
  - 8/11 : بيضاء
  - 3/11 : سوداء
- 1/2 : سوداء (نضيفها إلى الصندوق B) ← الصندوق B يحتوي على : 7 بيضاء ، 4 سوداء
  - 7/11 : بيضاء
  - 4/11 : سوداء

نتيجة :

1 ــ احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو $\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} = \frac{4}{11}$

2 ــ احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو $\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$

3 ــ القيم الممكنة لــ X هي $\{2\alpha ; -2\alpha ; 0\}$ حسب الحالات التالية :

الكرتين بيضاوين : $\alpha + \alpha = 2\alpha$

الكرتين سوداوين : $-\alpha - \alpha = -2\alpha$

الكرتين مختلفتين في اللون : $\alpha - \alpha = 0$

a) منه قانون احتمال المتغير x كمايلي :

X_i	0	-2α	2α
$P(X = X_i)$	5/11	2/11	4/11

حسب السؤال الأول : $P(X = 2\alpha) = \frac{4}{11}$

$P(X = -2\alpha) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$

إذن : $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{4}{11} + \frac{2}{11}\right) = \frac{5}{11}$

نتيجة : $E(X) = 0 - 2\alpha\left(\frac{2}{11}\right) + 2\alpha\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{-4\alpha + 8\alpha}{11} = \frac{4\alpha}{11}$

b) $E(X) = 1$ يكافئ $\frac{4\alpha}{11} = 1$

يكافئ $4\alpha = 11$

يكافئ $\alpha = \frac{11}{4}$

4 ــ نعيد عملية السحب بعد اضافة $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق B

شجرة الاحتمالات هي كمايلي :

سحب من الصندوق A

1/2 ← بيضاء : الصندوق B : 8 بيضاء ، n سوداء
- $\frac{8}{n+8}$ بيضاء
- $\frac{n}{n+8}$ سوداء

1/2 ← سوداء : الصندوق B : 7 بيضاء ، n + 1 سوداء
- $\frac{7}{n+8}$ بيضاء
- $\frac{n+1}{n+8}$ سوداء

a) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو $P = \frac{1}{2} \times \frac{8}{n+8} = \frac{4}{n+8}$

b) $P = 0{,}25$ يكافئ $\frac{4}{n+8} = 0{,}25$

يكافئ $\frac{4}{n+8} = \frac{1}{4}$

يكافئ $n + 8 = 16$

يكافئ $n = 8$

نتيجة : للحصول على احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0,25 يكفي أن يكون $n = 8$

إذن يكفي أن نضيف 5 كرات سوداء إلى الصندوق B $n - 3 = 8 - 3 = 5$

التمرين ــ 9

I) يسدد لاعب 3 رميات متتابعة نحو هدف

إذا علمت أن احتمال أن يصيب الهدف هو 0,7 أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يصيب الهدف 3 مرات

B : يصيب الهدف مرتين فقط

C : يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل

II) إذا علمت أن الهدف مكون من 3 مناطق مختلفة I ، II ، III حيث احتمالات إصابتها هي على الترتيب 0,1 ؛ 0,2 ؛ 0,4 أحسب احتمال الحوادث التالية :

D : يصيب المنطقة I 3 مرات

E : كل رمية تصيب منطقة واحدة من بين المناطق الثلاثة

III) يقوم اللاعب برمية واحدة فقط نرفق بكل رمية العلامة 10 إذا أصاب المنطقة I و العلامة 7 إذا أصاب المنطقة II و العلامة 5 إذا أصاب المنطقة III و العلامة 0 إذا كانت الاصابة خارج المناطق الثلاث

ليكن f المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العلامة المحصل عليها .

عين قانون احتمال المتغير f ثم أمله الرياضياتي E(f)

الحــل ــ 9

I) نرسم جدول الرميات الثلاثة حيث نرمز بــ $\begin{cases} 1 & \text{إذا أصاب الهدف .} \\ 0 & \text{إذا لم يصب الهدف .} \end{cases}$

إذن : الحالات الممكنة هي كمايلي :

ملاحظة : احتمال أن لا يصيب الهدف هو $1 - 0,7 = 0,3$

الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة	الحادثة	الاحتمال
0	0	0	a	$0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$
		1	b	$0,3 \times 0,3 \times 0,7 = 0,063$
	1	0	c	$0,3 \times 0,7 \times 0,3 = 0,063$
		1	d	$0,3 \times 0,7 \times 0,7 = 0,147$
1	0	0	e	$0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,063$
		1	f	$0,7 \times 0,3 \times 0,7 = 0,147$
	1	0	g	$0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147$
		1	h	$0,7 \times 0,7 \times 0,7 = 0,343$

نتيجة :

الحالات الموافقة للحادثة A هي {h} منه $P(A) = 0,343$

الحالات الموافقة للحادثة B هي {g ؛ f ؛ d} منه $P(B) = 3 \times 0,147 = 0,441$

الحالات الموافقة للحادثة C هي {h ؛ g ؛ f ؛ e ؛ d ؛ c ؛ b} منه $P(C) = 1 - 0,027 = 0,973$

(II $P(D) = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,001$

$P(E) = 6 \times (0,1 \times 0,2 \times 0,4) = 0,024$

تفسير : يوجد 6 حالات يصيب فيها المناطق الثلاث حسب ترتيب الرميات كمايلي I II III ؛ II III I ؛ III I II ؛ I III II ؛ III I II ؛ III II I

III) قانون المتغير العشوائي f :

f_i	10	7	5	0
$P(f = f_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

$$E(f) = 10(0,1) + 7(0,2) + 5(0,4) + 0 = 1 + 1,4 + 2 = 4,4$$

التمرين ــ 10

في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم المحصل عليه زوجي سمح له برمية أخرى . تنتهي اللعبة إجباريا بعد 10 رميات أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا

1 ــ ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الأولى

2 ــ ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية

3 ــ إذا أراد اللاعب أن يكون احتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات التي لا ينبغي تجاوزها

الحـل ـ 10

1 ـ في الرمية الأولى ، احتمال الحصول على رقم فردي هو $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ (3 أرقام فردية من بين 6)

2 ـ حتى تكون هناك رمية ثانية يجب أن تكون نتيجة الرمية الأولى هي رقم زوجي

إذن : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية هو $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 ـ **تعميم** : للحصول على رقم فردي في الرمية n يجب أن يتحصل اللاعب في كل من الرميات السابقة من 1 إلى $(n-1)$ على رقم زوجي

منه : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية n هو $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

نتيجة : حتى يكون احتمال الحصول على رقم فردي أكبر من 0,03 يلزم و يكفي

أن يكون : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} > 0{,}03$

أي : $\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] > \ln(0{,}03)$

أي : $n\ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln(0{,}03)$

أي $-n\ln 2 > \ln 0{,}03$

أي $n < \frac{\ln 0{,}03}{-\ln 2}$

أي $n < 5{,}05$

منه : ينبغي للاعب أن لا يتجاوز 5 رميات

التمرين ـ 11

في دراسة خاصة لحالة سيارات مدينة معينة تبين أن : 12 % من السيارات ذات مكابح ضعيفة

من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك 20 % منها لها إضاءة ضعيفة

من بين السيارات ذات المكابح القوية هناك 8 % منها لها إضاءة ضعيفة

لسلامة الطرقات طلب من شرطة مرور هذه المدينة تكثيف مراقبة السيارات

لتكن الحوادث التالية :

L : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها إضاءة قوية و $\overline{L}$ حادثتها العكسية

F : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها مكابح قوية و $\overline{F}$ حادثتها العكسية

1 ـ أحسب $P(F)$ ؛ $P_{\overline{F}}(\overline{L})$ ؛ $P_F(\overline{L})$

2 ـ أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح ضعيفة و إضاءة ضعيفة أيضا

3 ـ أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح قوية و إضاءة ضعيفة أيضا

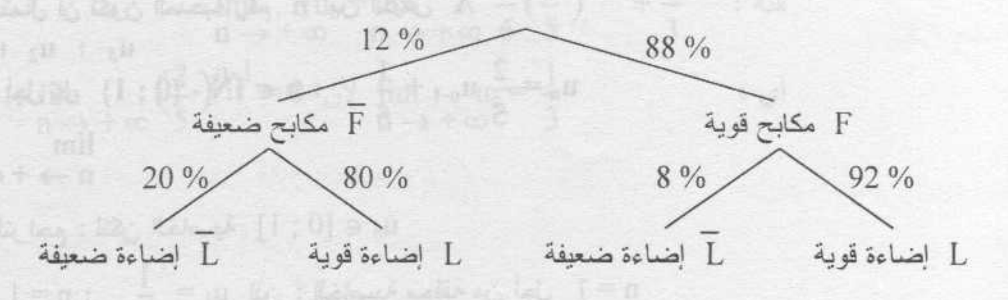
4 ـ استنتج احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات إضاءة ضعيفة

5 ـ علما أن السيارة المراقبة لها إضاءة ضعيفة ما هو احتمال أن تكون ذات مكابح ضعيفة

6 ـ برهن أن احتمال توقيف سيارة في حالة جيدة (مكابح قوية و إضاءة قوية) هو 0,8096

الحـل ـ 11

لنمثل هذه النسب المئوية على شكل شجرة كمايلي :



منه النتائج التالية :

1 ــ $P(F) = 88\,\% = \dfrac{88}{100} = 0{,}88$

$$P_{\overline{F}}(\overline{L}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{L})}{P(\overline{F})} = \frac{\frac{12}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{12}{100}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P_F(\overline{L}) = \frac{P(\overline{L} \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{88}{100} \times \frac{8}{100}}{\frac{88}{100}} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

2 ــ $P(\overline{F} \cap \overline{L}) = \dfrac{12}{100} \times \dfrac{20}{100} = \dfrac{3}{25} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{125}$

3 ــ $P(F \cap \overline{L}) = \dfrac{88}{100} \times \dfrac{8}{100} = \dfrac{22}{25} \times \dfrac{2}{25} = \dfrac{44}{625}$

4 ــ $P(\overline{L}) = P(F \cap \overline{L}) + P(\overline{F} \cap \overline{L}) = \dfrac{3}{125} + \dfrac{44}{625} = \dfrac{15 + 44}{625} = \dfrac{59}{625}$

5 ــ $P_{\overline{L}}(\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{F} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \dfrac{\frac{3}{125}}{\frac{59}{625}} = \dfrac{3}{125} \times \dfrac{625}{59} = \dfrac{15}{59}$

6 ــ $P(F \cap L) = \dfrac{88}{100} \times \dfrac{92}{100} = \dfrac{8096}{10000} = 0{,}8096$ و هو المطلوب .

.

التمرين ــ 12

I) (u_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{2}{5}\, u_{n-1} + \dfrac{1}{5} \end{cases}$ من أجل كل $n \in IN - \{0 ; 1\}$

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0 ; 1]$

2 ــ (v_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $v_n = u_n - \alpha$ حيث $\alpha \in IR$

عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

3 ــ أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج أن u_n متقاربة و عين نهايتها

II) A و B كيسان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :

الكيس A : 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

الكيس B : 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

نختار عشوائيا كيسا واحدا و نسحب منه كرة واحدة ثم نعيدها إلى نفس الكيس إذا كانت هذه الكرة بيضاء نسحب مرة أخرى من نفس الكيس أما إذا كانت سوداء فنسحب من الكيس الآخر و نعيد هذه التجربة n مرة .

ليكن u_n احتمال أن تكون السحبة رقم n من الكيس A

1 ــ أحسب u_1 ؛ u_2 ؛ u_3

2 ــ برهن أن من أجل كل $n \in IN - \{0 ; 1\}$: $u_n = \dfrac{2}{5}\, u_{n-1} + \dfrac{1}{5}$

3 ــ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحــل ــ 12

I) 1 ــ البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $u_n \in [0 ; 1]$

من أجل $n = 1$: $u_1 = \dfrac{1}{2}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

من أجل $n = 2$: $u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n \in [0 ; 1]$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} \in [0 ; 1]$ ؟

حسب فرضية التراجع : $u_n \in [0 ; 1]$ يكافئ $0 \le u_n \le 1$

يكافئ $0 \le \frac{2}{5} u_n \le \frac{2}{5}$

يكافئ $\frac{1}{5} \le \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} \le \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

يكافئ $\frac{1}{5} \le u_{n+1} \le \frac{3}{5}$

و خاصة $0 \le u_{n+1} \le 1$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0 ; 1]$

2 ـ

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$$
$$= \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} - \alpha$$
$$= \frac{2}{5} (u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \alpha)$$

نتيجة : تكون (v_n) هندسية إذا و فقط إذا كان $v_n = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \alpha$

أي $u_n - \alpha = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \alpha$

منه : $-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \alpha$

أي : $\frac{3}{2} \alpha = \frac{1}{2}$

منه : $\alpha = 1/3$

أخيرا $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ منه $v_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

خلاصة : (v_n) متتالية هندسية أساسها $2/5$ و حدها الأول $v_1 = 1/6$

إذن : $v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

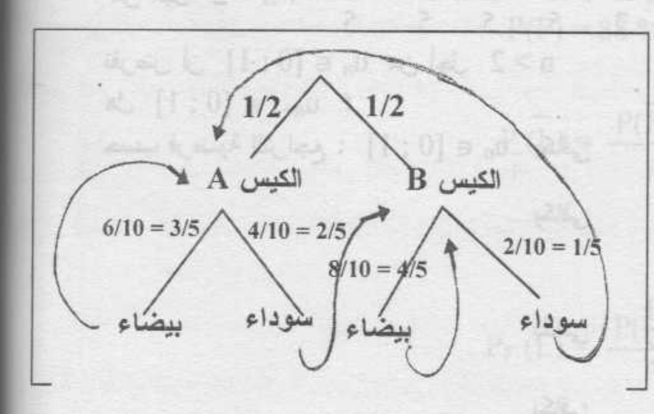
3 ـ لدينا : $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ منه $u_n = v_n + \frac{1}{3}$

أي : $v_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

منه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

أي : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

II) لنمثل شجرة السحب كما يلي :



1 –
$$u_1 = \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$
$$u_3 = u_2 \times \frac{6}{10} + (1 - u_2) \times \frac{2}{10}$$
$$= \frac{3}{5} u_2 - \frac{1}{5} u_2 + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{2}{5} u_2 + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{4+5}{25}$$
$$= \frac{9}{25}$$

2 – u_n هو احتمال السحب من الكيس A في السحبة رقم n

البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$ من أجل $n \in IN - \{0 ; 1\}$

من أجل $n = 2$ لدينا $u_2 = \frac{2}{5}$

و $\frac{2}{5} u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5}$ ؟

نميز حالتين كمايلي :

- السحب رقم n من الكيس A إذن : احتمال أن يكون السحب $(n + 1)$ في الكيس A هو $\frac{6}{10} u_n = \frac{3}{5} u_n$
- السحب رقم n من الكيس B إذن : احتمال أن يكون السحب $(n + 1)$ في الكيس A هو $\frac{2}{10} (1 - u_n) = \frac{1}{5} (1 - u_n)$

منه : $u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n + \frac{1}{5}(1 - u_n)$
$$= \frac{3}{5} u_n - \frac{1}{5} u_n + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5}$$
منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

خلاصة : من أجل كل $n \in IN - \{0 ; 1\}$: $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$

3 – $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1/3$ (حسب السؤال (3) من الجزء I)

لأن (u_n) هي المتتالية المعرفة في الجزء I من التمرين .

التمرين ــ 13

A و B لاعبان يتباريان في اللعبة التالية :
في البداية يدفع كل من اللاعبين مبلغ 1 DA و يرمي كل منهما قطعة نقدية غير مزيفة تحتوي على وجه F و ظهر P
إذا حصل A على الوجه و B على الظهر تتوقف اللعبة بفوز A الذي يأخذ المبلغ المدفوع (1 + 1)
إذا حصل A على الظهر و B على الوجه تتوقف اللعبة بفوز B الذي يأخذ المبلغ المدفوع (1 + 1)
في الحالات الأخرى يعتبر تعادلا و عليه يدفع اللاعبان مبلغ 1 DA ثم يبدآن من جديد رمي القطعة النقدية و هكذا تستمر اللعبة حتى يفوز أحد اللاعبين أو يحدث التعادل في المرة العشرين حيث كل لاعب يستعيد المبلغ الذي دفعه
من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \le n \le 20$ نعرف الحوادث التالية :
A_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز A
B_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز B
I_n : المحاولة n هي تعادل
نضع $X_n = P(A_n)$ ؛ $Y_n = P(B_n)$ ؛ $Z_n = P(I_n)$
1 ــ أحسب X_1 ، Y_1 ، Z_1

2 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \le n \le 19$:
$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \end{cases}$$

3 ــ استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \le n \le 20$:
$$\begin{cases} X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{cases}$$

4 ــ ليكن T المتغير العشوائي الذي يعبر عن مبلغ اللعب أثناء المحاولة التي تنهي اللعبة أي المبلغ الذي يحصل عليه الفائز أو المبلغ الذي يتقاسمه اللاعبان في حالة انتهاء اللعبة بتعادل .
إذا توقفت اللعبة في المحاولة k يكون عندها $T = 2k$
1 ــ ما هي أكبر قيمة ممكنة لــ T ؟
2 ــ أحسب $P(T = 40)$
3 ــ أحسب $P(T = 2k)$ بدلالة k حيث k عدد طبيعي و $1 \le k \le 19$ ثم عين قانون احتمال المتغير T

الحـل ــ 13

1 ــ عند رمي اللاعبين A و B القطعة النقدية لدينا النتائج الممكنة كمايلي :

A	B	التفسير	الاحتمال
F	F	تعادل	1/4
F	P	فوز A	1/4
P	F	فوز B	1/4
P	P	تعادل	1/4

منه النتائج التالية :
$$X_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}$$
$$Y_1 = P(B_1) = \frac{1}{4}$$
$$Z_1 = P(I_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ (حالتين للتعادل حسب الجدول)

2 ـ لتكن الخاصية : $\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \end{cases}$ من أجل $1 \le n \le 19$

البرهان بالتراجع :

لدينا : $\begin{cases} X_2 = \frac{1}{4} P(I_1) \\ Y_2 = \frac{1}{4} P(I_1) \\ Z_2 = \frac{1}{2} P(I_1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} X_2 = \frac{1}{4} Z_1 \\ Y_2 = \frac{1}{4} Z_1 \\ Z_2 = \frac{1}{2} Z_1 \end{cases}$

منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n$ و $Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n$ و $Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$ من أجل $1 \le n \le 18$

هل $X_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1}$ ، $Y_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1}$ ، $Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1}$ ؟

لدينا : $\begin{cases} X_{n+2} = \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Y_{n+2} = \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Z_{n+2} = \frac{1}{2} P(I_{n+1}) \end{cases}$ أي $\begin{cases} X_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Y_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1} \end{cases}$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \le n \le 19$: $\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \end{cases}$

3 ـ $Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$ إذن : (Z_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ و حدها الأول $Z_1 = 1/2$ منه $Z_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

أي $Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نتيجة : $\begin{cases} X_n = \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Y_n = \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{cases}$

II) 1 ـ يكون T أكبر ما يمكن إذا و فقط إذا انتهت اللعبة بالتعادل بعد 20 محاولة أي $k = 20$ منه $T = 40$

2 ـ يكون $T = 40$ (قيمة عظمى) إذا و فقط إذا كانت نتيجة الرمية 19 هو تعادل أي $P(T = 40) = Z_{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

3 ـ من أجل $1 \le k \le 19$ يكون $T = 2k$ إذا و فقط إذا كانت اللعبة قد انتهت بعد k محاولة

أي إما فوز A أو فوز B

منه : $P(T = 2k) = X_k + Y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

نتيجة : القيم الممكنة لـ T هي 40 ; 38 .... ; 2 k ; .... ; 6 ; 4 ; 2

منه قانون الاحتمال للمتغير العشوائي T هو كمايلي :

T_i	2	4	6	....	2 k	....	38	40
$P(T = T_i)$	1/2	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$		$(1/2)^k$		$(1/2)^{19}$	$(1/2)^{19}$

تحقيق :

حتى تكون هذه النتائج صحيحة يلزم و يكفي أن يكون المجموع

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$ يساوي 1

لدينا :
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

منه :
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1$$

حذار ! $P(T = 40)$ هو احتمال أن يكون التعادل في الرمية 19 مهما كانت النتيجة في الرمية 20

التمرين ــ 14

عشرة قريصات مرقمة من 1 إلى 10 . نسحب منها 3 قريصات في آن واحد

هل عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجي واحد على الأقل هو :

a) 180 b) 330 c) 110

الحـل ــ 14

عدد الأرقام الزوجية هو 5 و هي {2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10}

الحصول على رقم زوجي على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة كل الأرقام فردية منه عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^{3} - C_{5}^{3} = 120 - 10 = 110$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو c) 110

التمرين ــ 15

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث :

$P(A) = 0{,}4$ ؛ $P(B) = 0{,}5$ ؛ $P(\overline{A \cup B}) = 0{,}35$

هل قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ هي :

a) 0,1 b) 0,25 c) المعطيات غير كافية للجواب

الحـل ــ 15

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ منه : $0{,}35 = 1 - P(A \cup B)$

أي : $P(A \cup B) = 1 - 0{,}35$

أي $P(A \cup B) = 0{,}65$

من جهة أخرى : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

أي : $0{,}65 = 0{,}4 + 0{,}5 - P(A \cap B)$

منه : $P(A \cap B) = 0{,}9 - 0{,}65$

أي : $P(A \cap B) = 0{,}25$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) 0,25

التمرين ــ 16

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث $P(A \cap B) = 1/6$ و $P_A(B) = 1/4$. هل $P(A)$ يساوي :

a) 2/3   b) 1/24   c) 1/12

الحـل ــ 16

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ منه : $$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)}$$

أي $$P(A) = \frac{1/6}{1/4}$$

أي $$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{1}$$

أي $$P(A) = \frac{2}{3}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو a) 2/3

التمرين ــ 17

X متغير عشوائي قانون احتماله كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X = X_i)$	1/2	1/4	1/4

هل الانحراف المعياري لــ X هو : a) $\frac{3}{2}$ b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) 2

الحـل ــ 17

$$E(X) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$Var(X) = \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{4}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(4-2)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

قوانين الإحتمال

KIMOU.

I . قانون برنولي

تعريف :

نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين فقط S و $\overline{S}$ حيث احتمالهما على الترتيب p و $1-p$

مع $0 \leq p \leq 1$ و عليه فإن قانون برنولي هو المتغير العشوائي X المعرف كمايلي : $X = 1$ إذا تحقق المخرج S ، $X = 0$ إذا تحقق المخرج $\overline{S}$

قانون برنولي :

x	1	0
$p(X=x)$	p	$1-p$

p يسمى وسيط X

ملاحظة :

$$E(x) = 1(p) + 0(1-p) = p$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= p(1-p)^2 + (1-p)(0-p)^2 \\ &= p(1-p)(1-p+p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

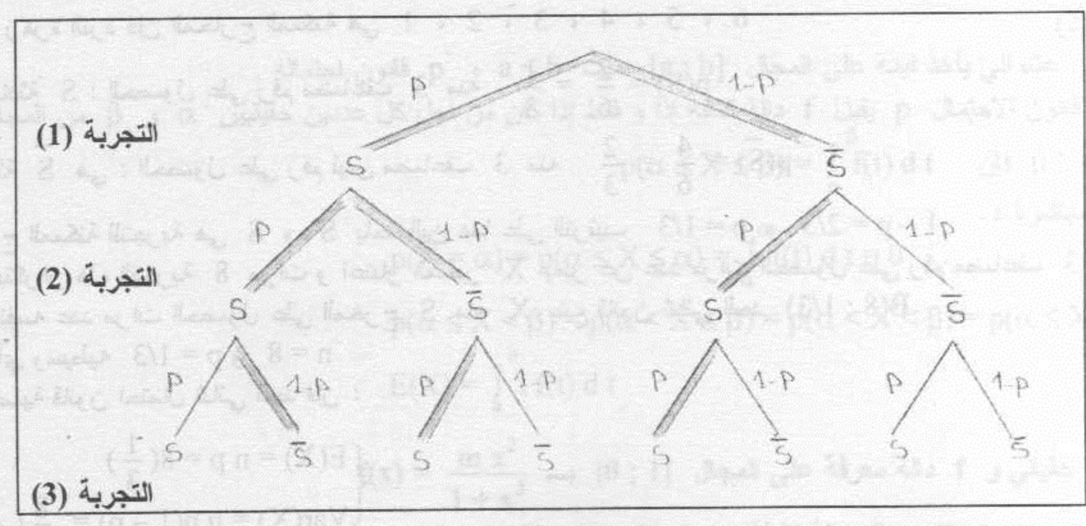
قانون ثنائي الحد

لتكن تجربة برنولي ذات الوسيط p و المخرجين S و $\overline{S}$

لدينا إذن المخطط على شجرة ذات ورقتين S و $\overline{S}$ التالي :

p ، $1-p$ ، S ، $\overline{S}$

عند القيام بهذه التجربة n مرة مختلفة نحصل على الشجرة التالية ذات 2^n ورقة متناوبة على الترتيب S و $\overline{S}$:



لاحظ أن من أجل $n = 3$ لدينا $2^3 = 8$ أوراق متناوبة على الترتيب S و $\overline{S}$

إذا اعتبرنا X متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات تحقق المخرج S بعد تكرار تجربة برنولي n مرة فإن القيم الممكنة لـ X هي 0 ، 1 ، 2 ، ...... n و نبرهن أن من أجل كل عدد طبيعي k حيث $0 \leq k \leq n$

فإن $p(X = k) = C_n^k \; p^k(1-p)^{n-k}$

مثلا : في التجربة السابقة أي $n = 3$ لدينا :

من أجل $k = 2$: $p(X = 2) = p^2(1-p) + p^2(1-p) + p^2(1-p) = 3\,p^2(1-p)$

و من جهة أخرى : $C_3^2 \; p^2(1-p)^{3-2} = 3\,p^2(1-p)$

(أنظر الأغصان المضاعفة في الشجرة)

نتيجة : حسب قانون احتمال المتغير العشوائي فإن : $\sum_{k=0}^{n} p(X = k) = 1$

أي : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = (1)^n = 1$

نقول أن المتغير X يتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين n و p

تعريف :

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع قانون ثنائي الحد بوسيطين n و p إذا كان X يأخذ قيم عدد مرات تحقيق المخرج S لتجربة برنولي المكررة n مرة و نرمز له بـ $X ? B(n ; p)$

نتائج دون برهان :

n عدد طبيعي غير معدوم و p عدد حقيقي من المجال $[0 ; 1]$

X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n ; p)$

من أجل كل عدد طبيعي k حيث $0 \le k \le n$ فإن $p(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$E(X) = n\,p$$
$$Var(X) = n\,p(1-p)$$

نشاط :

نرمي 8 مرات زهرة نرد غير مزيفة ذات 6 أوجه مرقمة من 1 إلى 6

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3

1 ـ هل X يتبع قانون ثنائي الحد ؟ في حالة الاجابة بنعم حدد وسيطيه n و p

2 ـ عين الأمل الرياضيائي E(X) و الانحراف المعياري σ(X)

3 ـ ما هو احتمال الحصول على 4 مرات مضاعف 3

4 ـ ما هو احتمال الحصول على 7 مرات على الأكثر مضاعف 3

5 ـ نرمي الآن زهرة النرد n مرة حيث n > 2 . ما هو احتمال الحصول على مرة واحدة على الأقل على مضاعف 3 ؟
ما هي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون هذا الاحتمال أكبر من 0,999

الحـل :

1 ـ عند رمي زهرة النرد فإن المخارج الممكنة هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6

لنعتبر الحادثة S : الحصول على رقم مضاعف 3 منه $p(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

إذن الحادثة $\overline{S}$ هي : الحصول على رقم ليس مضاعف 3 منه $p(\overline{S}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

نتيجة : المخارج الممكنة للتجربة هي S و $\overline{S}$ باحتمالين هما على الترتيب $p = 1/3$ و $1 - p = 2/3$

منه : بتكرار هذه التجربة 8 مرات و اعتبار المتغير X يعبر عن عدد مرات الحصول على رقم مضاعف 3 هو نفسه عدد مرات الحصول على المخرج S منه X يتبع قانون ثنائي الحد $B(8 ; 1/3)$

أي وسيطيه $p = 1/3$ و $n = 8$

2 ـ حسب خاصية قانون احتمال ثنائي الحد فإن :

$$\begin{cases} E(X) = n\,p = 8(\frac{1}{3}) \\ Var(X) = n\,p(1-p) = \frac{8}{3}(\frac{2}{3}) \end{cases}$$

نتيجة : $E(X) = \frac{8}{3}$ و $\sigma(X) = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

3 ـ احتمال الحادثة : الحصول على 4 مرات مضاعف 3 :

$$p(X=4) = C_8^4\, p^4(1-p)^{8-4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2}\,(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^4 = 70 \times \frac{1}{81} \times \frac{16}{81} = \frac{1120}{6561}$$

4 ـ احتمال الحادثة : الحصول على 7 مرات على الأكثر على مضاعف 3
هي الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على 8 مرات على مضاعف 3 منه

الاحتمال هو : $1 - p(X=8) = 1 - C_8^8 p^8(1-p)^0 = 1 - p^8 = 1 - (\frac{1}{3})^8 = \frac{6560}{6561}$

5 ــ **الحادثة** : الحصول على مرة واحدة على الأقل على رقم مضاعف 3 هي الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على كل الأرقام ليست مضاعفات 3 أي $X = 0$

منه الاحتمال هو : $1 - p(X = 0) = 1 - C_n^0 p^0(1 - p)^n = 1 - (\frac{2}{3})^n$

نتيجة : $1 - (\frac{2}{3})^n > 0,999$ تكافئ $1 - 0,999 > (\frac{2}{3})^n$

تكافئ $0,001 > (\frac{2}{3})^n$

تكافئ $\ln(0,001) > n\ln(\frac{2}{3})$

تكافئ $n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(2/3)}$

تكافئ $n > 17,03$

نتيجة : أصغر قيمة لــ n حتى يكون احتمال الحصول على الأقل على مضاعف 3 أكبر من 0,999 هي $n = 18$

III . قوانين الاحتمال المستمرة

تعريف (1)

f دالة عددية معرفة على مجال $[a ; b]$ حيث $a < b$

نقول أن f هي دالة كثافة احتمال على المجال $[a ; b]$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

(1) f مستمرة على $[a ; b]$

(2) f موجبة على $[a ; b]$

(3) $\int_a^b f(t)\,dt = 1$

تعريف (2)

X متغير عشوائي يأخذ قيمه على المجال $[a ; b]$ حيث $a < b$ و p قانون احتماله .

نقول أن قانون الاحتمال p يقبل f دالة كثافة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عددين حقيقيين α و β من المجال $[a ; b]$ حيث $\beta \geq \alpha$ فإن $p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$

خواص مباشرة :

$$p(X = \alpha) = p(\alpha \leq X \leq \alpha) = \int_\alpha^\alpha f(t)\,dt = 0$$

$$p(\alpha \leq X < \beta) = p(\alpha < X \leq \beta) = p(\alpha < X < \beta) = p(\alpha \leq X \leq \beta)$$

$$E(X) = \int_a^b t\,f(t)\,dt$$

مثال :

m عدد حقيقي و f دالة معرفة على المجال $[0 ; 1]$ بـــ $f(x) = \frac{m\,x^2}{1 + x^3}$

1 ــ عين m حتى تكون f دالة كثافة احتمال على $[0 ; 1]$

2 ــ ليكن X متغير عشوائي معرف على $[0 ; 1]$ و الذي قانون احتماله p يقبل الدالة f كدالة كثافة احتمال أحسب $p(X \leq 1/2)$ ؛ $p(X \geq 1/2)$ ؛ $p(1/3 \leq X \leq 1/2)$

الحــل :

1 ــ تكون f دالة كثافة احتمال على المجال $[0 ; 1]$ إذا و فقط إذا تحققت الشروط التالية :

ش$_1$: f مستمرة على $[0 ; 1]$

ش$_2$: f موجبة على $[0 ; 1]$

ش$_3$: $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

f : مستمرة على $[0 ; 1]$ إذن : الشرط ش$_1$ محقق

تكون f موجبة على $[0 ; 1]$ إذا و فقط إذا كان $m \geq 0$ لأن $\frac{x^2}{1 + x^3} > 0$

إذن : الشرط ش$_2$ محقق إذا و فقط إذا كان $m \geq 0$

الشرط ش$_3$ يكافئ $\int_0^1 \frac{m\,x^2}{1 + x^3}\,dx = 1$

يكافئ $m \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\, dx = 1$

يكافئ $\frac{m}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3}\, dx = 1$

يكافئ $\frac{m}{3} [\ln(1+x^3)]_0^1 = 1$

يكافئ $\frac{m}{3} [\ln(1+1) - \ln(1+0)] = 1$

يكافئ $\frac{m}{3} \ln 2 = 1$

يكافئ $m \ln 2 = 3$

يكافئ $m = \frac{3}{\ln 2}$

بما أن $0 < \frac{3}{\ln 2}$ فإن قيمة m تحقق الشرط ش2

نتيجة : قيمة m حتى تكون f دالة كثافة احتمال هي $m = \frac{3}{\ln 2}$

منه $f(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)\ln 2}$

2 — $p(X \le 1/2) = p(0 \le X \le 1/2)$

$= \int_0^{1/2} f(x)\, dx$

$= \frac{1}{\ln 2} \int_0^{1/2} \frac{3x^2}{1+x^3}\, dx$

$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+x^3)]_0^{1/2}$

$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+\frac{1}{8}) - \ln(1+0)]$

$= \frac{\ln(9/8)}{\ln 2}$

$= \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 2}$

$= \frac{2\ln 3}{\ln 2} - \frac{3\ln 2}{\ln 2}$

$= \frac{2\ln 3}{\ln 2} - 3$

$= 0,169$

$p(X \ge 1/2) = 1 - p(X \le 1/2)$

$= 1 - 0,169$

$= 0,831$

$p(1/3 \le X \le 1/2) = \int_{1/3}^{1/2} f(x)\, dx$

$= \frac{1}{\ln 2} \int_{1/3}^{1/2} \frac{3x^2}{1+x^3}\, dx$

$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+x^3)]_{1/3}^{1/2}$

$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+\frac{1}{8}) - \ln(1+\frac{1}{27})]$

$$= \frac{1}{\ln 2}[\ln(\frac{9}{8}) - \ln(\frac{28}{27})]$$
$$= \frac{1}{\ln 2} \times \ln(\frac{9}{8} \times \frac{27}{28})$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\ln(\frac{243}{224})$$
$$= 0{,}117$$

III . قانون التوزيعات المنتظمة

تعريف :

X متغير عشوائي يتبع قانون احتمال p يقبل دالة كثافة f على المجال $[a ; b]$ حيث $a < b$

نقول أن X يتبع قانون توزيع منتظم على $[a ; b]$ إذا و فقط إذا كانت f دالة ثابتة على المجال $[a ; b]$

نتائج مباشرة :

f دالة ثابتة على $[a ; b]$ إذن : من أجل كل x من $[a ; b]$ فإن $f(x) = k$ حيث $k \in IR$

لكن : $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

إذن : $\int_a^b k\,dx = 1$

أي $[kx]_a^b = 1$

أي : $kb - ka = 1$

أي $k(b-a) = 1$

منه : $k = \frac{1}{b-a}$ لأن $a \neq b$

نتيجة : $f(x) = \frac{1}{b-a}$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي α من المجال $[a ; b]$ فإن :

$$p(X \le \alpha) = p(a \le X \le \alpha) = \int_a^{\alpha} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}[x]_a^{\alpha} = \frac{\alpha - a}{b-a}$$

الأمل الرياضي :

من تعريف الأمل الرياضي : $E(X) = \int_a^b t\,f(t)\,dt$

$$= \int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2\right]$$
$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$
$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$
$$= \frac{b+a}{2}$$

<u>مثال</u> : نختار عشوائيا عددا حقيقيا من المجال [4 ; 6]

ما هو احتمال أن يكون هذا العدد : A) محصور بين $\frac{9}{2}$ و $\frac{16}{3}$

B) أكبر من $\frac{36}{7}$

<u>**الحـل**</u> **:** ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار قيمة العدد المختار من المجال [4 ; 6]

إذن : X يتبع قانون توزيع منتظم على المجال [4 ; 6] حيث دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \frac{1}{6-4} = \frac{1}{2}$

منه النتائج التالية :

A)

$$p(9/2 \le X \le 16/3) = \int_{9/2}^{16/3} f(x)\,dx$$
$$= \int_{9/2}^{16/3} \frac{1}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x\right]_{9/2}^{16/3}$$
$$= \frac{16}{6} - \frac{9}{4}$$
$$= \frac{10}{24}$$
$$= \frac{5}{12}$$

B)

$$p(x > 36/7) = p(36/7 < X < 6)$$
$$= \int_{36/7}^{6} f(x)\,dx$$
$$= \int_{36/7}^{6} \frac{1}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x\right]_{36/7}^{6}$$
$$= 3 - \frac{36}{14}$$
$$= \frac{6}{14}$$
$$= \frac{3}{7}$$

IV. القانون الأسي :

تعريف :

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع القانون الأسي ذو الوسيط λ إذا و فقط إذا كانت دالة كثافة احتماله هي الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما .

نتائج :

1 ـ ليكن $\alpha \in]0 ; +\infty[$ إذن :

$$p(X \le \alpha) = p(0 \le X \le \alpha)$$
$$= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$
$$= \int_0^{\alpha} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$
$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha}$$
$$= -e^{-\lambda\alpha} + 1$$
$$= 1 - e^{-\lambda\alpha}$$

2 ـ

$$E(X) = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} x\,f(x)\,dx$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

لنحسب بالتجزئة : $I = \int_0^{\alpha} x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$ منه $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = - e^{-\lambda x} \end{cases}$

منه : $I = [- x e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x} dx$

$= - \alpha e^{-\lambda\alpha} + \left[- \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha}$

$= - \alpha e^{-\lambda\alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda}$

نتيجة : $E(X) = \lim_{\alpha \to +\infty} - \alpha e^{-\lambda\alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

لأن $\begin{cases} \lim_{\alpha \to +\infty} - \alpha e^{-\lambda\alpha} = 0 \\ \lim_{\alpha \to +\infty} e^{-\lambda\alpha} = 0 \end{cases}$ $(\lambda > 0)$

خلاصة : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

<u>مثال</u> : **X متغير عشوائي يتبع قانونا أسيا وسيطه λ**

عين λ علما أن $p(X \geq 50) = 2/3$

<u>الحـــل</u> : دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي X هي $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

منه : $p(X \leq 50) = 1 - e^{-50\lambda}$ حسب النتائج المباشرة من الدرس

لكن $p(X \geq 50) = 1 - p(x \leq 50)$

أي $p(X \geq 50) = 1 - (1 - e^{-50\lambda})$

أي $p(X \geq 50) = e^{-50\lambda}$

نتيجة : $p(X \geq 50) = 2/3$ يكافئ $e^{-50\lambda} = 2/3$

يكافئ $- 50 \lambda = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

يكافئ $\lambda = - \frac{1}{50} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

يكافئ $\lambda = \frac{1}{50} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ لأن $- \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

<u>تطبيق</u> :

نعتبر زمن انتظار الزبائن أمام الشباك في احدى الادارات كمتغير عشوائي X بالدقائق و يتبع قانون أسي بوسيط λ حيث $\lambda = 0,08$

1 ـ ما هو احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أقل من 10 دقائق

2 ـ ما هو احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أكثر من 30 دقيقة

3 ـ ما هو معدل زمن الانتظار أمام هذا الشباك .

<u>الحـــل</u> :

X يتبع قانون أسي ذو الوسيط $\lambda = 0,08$ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = 0,08 e^{-0,08x}$

و من أجل كل α من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن : $p(X \leq \alpha) = 1 - e^{-0,08\alpha}$

منه النتائج التالية :

1 ـ $p(X < 10) = 1 - e^{-0,08(10)}$

$= 1 - e^{-0,8}$

$\approx 0,550$

إذن احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أقل من 10 دقائق هو 0,55

2 ـ $p(X > 30) = 1 - p(X \leq 30)$

$= 1 - (1 - e^{-0,08(30)})$

$= e^{-0,08(30)}$

$= e^{-2,4}$

$\approx 0,090$

إذن : احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أكثر من 30 دقيقة هو 0,09

3 ــ معدل زمن الانتظار هو الأمل الرياضياتي للمتغير X

أي : $E(X) = \dfrac{1}{0{,}08} \approx 12{,}5$

منه : معدل زمن الانتظار هو 12,5 دقيقة (12 دقيقة و 30 ثانية)

تمارين الكتاب المدرسي

<u>التمرين ــ 1</u>

في امتحان شهادة بكالوريا كانت نسبة النجاح 40 %

من بين 5 أصدقاء مترشحين ، ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) أن لا يكون أي ناجح

B) أن ينجح واحد فقط

C) أن ينجح إثنان فقط

D) أن ينجح على الأقل إثنان

E) أن ينجح الأصدقاء الخمسة

<u>الحل ــ 1</u>

تجربة اختيار مترشح ما لها مخرجين فقط هما :

S : النجاح باحتمال $p = 40\,\% = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$

$\overline{S}$: عدم النجاح باحتمال $1 - p = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

إذن : بتكرار هذه التجربة 5 مرات نعتبر المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد المترشحين الناجحين من بين الخمسة أصدقاء

منه X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 5$ و $p = \dfrac{2}{5}$

و عليه النتائج كمايلي :

A) $p(A) = p(X=0) = C_5^0\, p^0(1-p)^5 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 = \dfrac{243}{3125}$

B) $p(B) = p(X=1) = C_5^1\, p^1(1-p)^4 = 5 \times \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = \dfrac{162}{625}$

C) $p(C) = p(X=2) = C_5^2\, p^2(1-p)^3 = 10\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \dfrac{216}{625}$

D)
$$\begin{aligned} p(D) &= p(X \geq 2) \\ &= 1 - p(X < 2) \\ &= 1 - [p(X=1) + p(X=0)] \\ &= 1 - \left[\dfrac{162}{625} + \dfrac{243}{3125}\right] \\ &= 1 - \dfrac{810 + 243}{3125} \\ &= \dfrac{2072}{3125} \end{aligned}$$

E) $p(E) = p(X=5) = C_5^5\, p^5(1-p)^0 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^5 = \dfrac{32}{3125}$

التمرين – 2

عائشة ، فاطمة و خديجة ثلاث صديقات ترشحن لامتحان شهادة البكالوريا بحظوظ مختلفة حسب مجهودات كل منها طوال السنة الدراسية .

إذا كانت احتمالات نجاح كل منها هي 0,25 (عائشة) و 0,9 (فاطمة) ، 0,45 (خديجة)

أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : تنجح الصديقات الثلاثة معا .

B : تنجح واحدة منهن على الأقل .

C : تنجح صديقتان فقط .

D : تنجح صديقتان فقط من بينها فاطمة .

الحـل – 2

نرمز بـ 0 إلى الرسوب و 1 إلى النجاح

منه الحالات الممكنة هي كمايلي :

عائشة	فاطمة	خديجة	الحادثة	الاحتمال
0	0	0	a	$0{,}75 \times 0{,}1 \times 0{,}55 = 0{,}04125$
		1	b	$0{,}75 \times 0{,}1 \times 0{,}45 = 0{,}03375$
	1	0	c	$0{,}75 \times 0{,}9 \times 0{,}55 = 0{,}37125$
		1	d	$0{,}75 \times 0{,}9 \times 0{,}45 = 0{,}30375$
1	0	0	e	$0{,}25 \times 0{,}1 \times 0{,}55 = 0{,}01375$
		1	f	$0{,}25 \times 0{,}1 \times 0{,}45 = 0{,}01125$
	1	0	g	$0{,}25 \times 0{,}9 \times 0{,}55 = 0{,}12375$
		1	h	$0{,}25 \times 0{,}9 \times 0{,}45 = 0{,}10125$

لاحظ أن احتمال رسوب عائشة ، فاطمة و خديجة هي على الترتيب 0,75 ؛ 0,1 ؛ 0,55

منه النتائج التالية :

الحادثة A توافق الحادثة h

منه : $p(A) = p(h) = 0{,}10125$

الحادثة B توافق الحادثة $\overline{a}$ (الحادثة العكسية للحادثة a ناجحة)

منه : $p(B) = p(\bar{a}) = 1 - p(a) = 1 - 0{,}04125 = 0{,}95875$

الحادثة C توافق الحوادث : $\{d ; f ; g\}$

منه :

$$p(C) = p(d) + p(f) + p(g) = 0{,}30375 + 0{,}01125 + 0{,}12375 = 0{,}43875$$

الحادثة D توافق الحوادث $\{d ; g\}$

منه : $p(D) = p(d) + p(g) = 0{,}30375 + 0{,}12375 = 0{,}4275$

التمرين – 3

نرمي زهرة نرد متوازنة 4 مرات متتابعة

1 – أحسب p احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

2 – أحسب p' احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي

3 – أجب عن السؤالين (1) و (2) من أجل خمس رميات متتابعة

4 – أجب عن السؤال (1) من أجل n رمية متتابعة $(n > 5)$

الحـل – 3

عند رمي زهرة النرد لدينا مخرجين فقط هما :

S : الحصول على رقم زوجي باحتمال $p(S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\overline{S}$: الحصول على رقم فردي باحتمال $p(\overline{S}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1 – إذن : عند تكرار هذه التجربة 4 مرات نعتبر المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على رقم زوجي

إذن : X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد بوسيطين $n = 4$ و $p = \frac{1}{2}$

عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

إذن : $X = \frac{4}{2} = 2$

منه : $p = p(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

2 ـ عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي أي $X = 3$ أو $X = 4$

منه :

$$\begin{aligned} p' &= p(X > 2) \\ &= p(X = 3) + p(X = 4) \\ &= C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) + C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 4\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

3 ـ عند إعادة التجربة 5 مرات فإن :

لا يمكن الحصول على عدد مرات ظهور رقم فردي يساوي عدد مرات ظهور رقم زوجي لأن عدد الرميات هو 5

أي فردي $\left(\frac{5}{2} \notin N\right)$

منه : $p = 0$

يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي إذا و فقط إذا كان $X = 3$ أو $X = 4$

أو $X = 5$

أي :

$$\begin{aligned} p' &= p(X > 2) \\ &= p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) \\ &= C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= 10\left(\frac{1}{32}\right) + 5\left(\frac{1}{32}\right) + \frac{1}{32} \\ &= \frac{16}{32} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 ـ إذا أعدنا التجربة n مرة نميز حالتين كمايلي :

الحالة الأولى : n زوجي إذن : $n = 2k$ حيث $k \in IN^*$

إذن :

$$\begin{aligned} p &= p(X = k) \\ &= C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

حيث $k = n/2$

الحالة الثانية : n فردي إذن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in IN^*$

في هذه الحالة لا يمكن أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي لأن عدد الرميات فردي منه $p = 0$

<u>التمرين ـ 4</u>

في احدى المسابقات يطرح على المترشح سؤال مرفوق بثلاث أجوبة مقترحة و احد منها فقط صحيحة . فيقدم المترشح إجابة عشوائية و دون تفكير .

1 ـ ما هو احتمال أن تكون إجابته صحيحة .

2 ـ المسابقة مكونة الآن من 5 أسئلة من الشكل السابق .

أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 3 أسئلة .

B : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 4 أسئلة .

C : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 5 أسئلة .

3 ــ إذا كان النجاح في المسابقة يقتضي الإجابة الصحيحة عن 3 أسئلة على الأقل . فما هو احتمال نجاح هذا المترشح الذي يعتمد في الإجابة على الطريقة العشوائية .

الحل ــ 4

1 ــ تجربة الإجابة العشوائية على سؤال له 3 اختيارات لها مخرجين فقط هما :

S : الجواب صحيح و احتماله 1/3 $p(S) = 1/3$

$\overline{S}$: الجواب خاطئ و احتماله 2/3 $p(\overline{S}) = 2/3$

نتيجة : احتمال أن تكون الإجابة صحيحة هو 1/3

2 ــ المسابقة مكونة من 5 أسئلة

إذن : بتكرار التجربة 5 مرات نعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الأجوبة الصحيحة منه X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 5$ و $p = 1/3$ منه النتائج التالية :

(A $$p(A) = p(X = 3) = C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{40}{243}$$

(B $$p(B) = p(X = 4) = C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right) = 5\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{243}$$

(C $$p(C) = p(X = 5) = C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

3 ــ احتمال الحصول على 3 أجوبة صحيحة على الأقل أي $X = 3$ أو $X = 4$ أو $X = 5$ منه : احتمال النجاح هو :

$$p = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$$

$$= \frac{40}{243} + \frac{10}{243} + \frac{1}{243}$$

$$= \frac{51}{243} = \frac{17}{81}$$

ملاحظة : في هذا التمرين اعتبرنا أن التلميذ يجاوب إجباريا على السؤال أي دائما يعطي إقتراح سواء كان صحيح أو خاطئ .

التمرين ــ 5

يحب رشيد صناعة النكت لكنه للأسف لا يوفق أحيانا في تشكيل نكتة مضحكة حيث احتمال أن تكون نكتته مضحكة هو 0,05 إذا علمت أن رشيد يشكل نكتة كل يوم . أحسب احتمال أن يشكل نكتة مضحكة في :

A) أسبوع B) شهر (30 يوم) C) سنة (365 يوم)

الحل ــ 5

تجربة رشيد في تشكيل نكتة لها مخرجين فقط هما :

S : النكتة مضحكة باحتمال $p = 0,05$

$\overline{S}$: النكتة ليست مضحكة باحتمال $1 - p = 0,95$

منه : تكرار هذه التجربة n مرة و اعتبار المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد النكت المضحكة التي شكلها رشيد بعد تكرار التجربة n مرة (أي n يوما) فإن X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n هو عدد الأيام و $p = 0,05$ منه النتائج التالية :

1 ــ احتمال الحصول على نكتة مضحكة في أسبوع $(n = 7)$

$$p(X = 1) = C_7^1\,(0,05)^1(0,95)^6 = 7 \times 0,05 \times (0,95)^6$$

2 ــ احتمال الحصول على نختة مضحكة في شهر $(n = 30)$

$$p(X = 1) = C_{30}^1\,(0,05)^1(0,95)^{29} = 30 \times 0,05 \times (0,95)^{29}$$

3 ــ احتمال الحصول على نكتة مضحكة في سنة $(n = 365)$

$$p(X = 1) = C_{365}^1(0,05)^1(0,95)^{364} = 365 \times 0,05 \times (0,95)^{364}$$

التمرين ــ 6

نرمي قطعة نقود متوازنة n مرة

ما هو أصغر عدد من الرميات اللازمة حتى يكون احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل أكبر تماما من % 98

الحـــل ــ 6

تجربة رمي القطعة النقدية المتوازنة لها مخرجين فقط هما :

S : ظهور الوجه F باحتمال 1/2

$\overline{S}$: ظهور الظهر P باحتمال 1/2

باعتبار اعادة التجربة n مرة و المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على الوجه F فإن X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 1/2$

منه : احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة $X = 0$

منه الاحتمال المطلوب هو : $1 - p(X = 0)$

أي : $$1 - C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نتيجة : $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 98\ \%$ يكافئ $1 - 98\ \% > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

يكافئ $1 - 0{,}98 > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

يكافئ $0{,}02 > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

يكافئ $\ln(0{,}02) > n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

يكافئ $\ln(0{,}02) > -n\ln 2$

يكافئ $\frac{\ln(0{,}02)}{\ln 2} > -n$

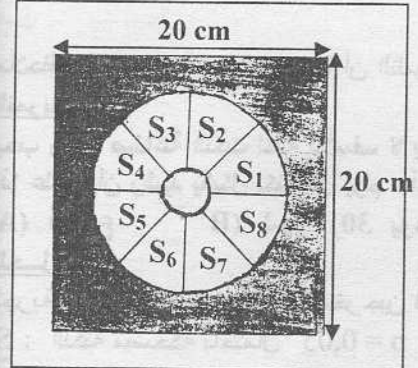
يكافئ $n > \frac{-\ln(0{,}02)}{\ln 2}$

يكافئ $n > 5{,}64$

يكافئ $n \geq 6$

خلاصة : أصغر عدد من الرميات اللازمة هو 6 رميات .

التمرين ــ 7



إليك الشكل المقابل :

نضع عشوائيا نقطة على هذا الشكل

احتمال أن تكون النقطة في جزء ما من الشكل هو نسبة مساحة هذا الجزء إلى مساحة المربع بأكمله .

I) 1 ــ أحسب $p(D)$ احتمال أن تكون النقطة على القرص ذو المساحة D

2 ــ أحسب $p(S_1)$ احتمال أن تكون النقطة على الجزء ذو المساحة S_1

II) لتكن القيم التقريبية التالية :

$$p(D) = 0{,}008$$

$$p(S_k) = 0{,}0785 \text{ من أجل } k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$$

نعتبر اللعبة التالية :

إذا كانت النقطة على القرص D نربح المبلغ 10 da

إذا كانت النقطة على أحد الأجزاء S_k نربح k DA مع $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

إذا كانت النقطة تقع في المنطقة R الملونة نخسر 4 DA

نرمز بــ X للمتغير العشوائي الذي يعبر عن المبلغ المحصل عليه

1 ــ أحسب $p(R)$ ثم الأمل الرياضياتي للمتغير X

2 ــ نلعب مرتين متتابعتين و بكيفيتين مستقلتين . أحسب احتمال الحصول على مبلغ موجب أو معدوم

3 ــ ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 نلعب n مرة متتابعة .

أحسب الاحتمال p_n للحصول على نقطة واحدة على الأقل داخل القرص D ثم حدد أصغر قيمة لــ n يكون من أجلها $p_n \geq 0{,}9$

الحل – 7

مساحة المربع هي $20 \times 20 = 400$ مقدرة بـ cm^2

I) 1 – $p(D) = \dfrac{D}{400}$ حيث D هي مساحة القرص D .

2 – $p(S_1) = \dfrac{S_1}{400}$ حيث S_1 هي مساحة الجزء S_1

II) 1 – $p(R) = 1 - [p(D) + \sum_{k=1}^{8} p(S_k)]$

$= 1 - p(D) - 8\,p(S_k)$

$= 1 - 0{,}008 - 8(0{,}0785)$

$= 0{,}364$

لدينا قانون احتمال المتغير العشوائي X كمايلي

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	10	- 4
$p(X = X_i)$	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,008	0,364

منه : $E(X) = 0{,}0785(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 0{,}008(10) + 0{,}364(-4)$

$= 0{,}0785(36) + 0{,}08 - 1{,}456$

$= 1{,}45$

2 – الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على مبلغ موجب أو معدوم هي

الحادثة : الحصول على مبلغ سالب تماما . و ليكن $p(\overline{S})$ هذا الاحتمال

الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي : $\{RR ; RS_3 ; RS_2 ; RS_1 ; S_3R ; S_2R ; S_1R\}$

منه : $p(\overline{S}) = [p(R)]^2 + 6 \times p(R) \times p(S_k)$

$= (0{,}364)^2 + 6 \times (0{,}364)(0{,}0785)$

$= 0{,}30394$

نتيجة : احتمال الحصول على مبلغ موجب أو معدوم هو :

$1 - p(\overline{S}) = 1 - 0{,}30394$

$= 0{,}69606$

3 – تجربة وضع نقطة على الشكل لها مخرجين فقط هما :

S : النقطة على القرص D باحتمال $p(S) = 0{,}008$

$\overline{S}$: النقطة خارج القرص D باحتمال $p(\overline{S}) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$

إذن : بتكرار التجربة n مرة و اعتبار المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على نقطة داخل القرص D فإن المتغير X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0{,}008$

إذن : $p_n = p(X \geq 1)$

$= 1 - p(X = 0)$

$= 1 - C_n^0 (0{,}008)^0 (0{,}992)^n$

$= 1 - (0{,}992)^n$ و هو احتمال الحصول على نقطة على الأقل داخل القرص D

نتيجة : $p_n \geq 0{,}9$ يكافئ $1 - (0{,}992)^n \geq 0{,}9$

يكافئ $1 - 0{,}9 \geq (0{,}992)^n$

يكافئ $0{,}1 \geq (0{,}992)^n$

يكافئ $\ln(0{,}1) \geq n \ln(0{,}992)$

يكافئ $n \geq \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}992)}$

يكافئ $n \geq 286{,}67$

إذن : أصغر قيمة لـ n حتى يكون $p_n \geq 0{,}9$ هي $n = 287$

التمرين ــ 8

يحتوي صندوق على 5 كرات منها 4 سوداء و واحدة بيضاء .

I) نسحب من الصندوق 6 كرات على التوالي مع الارجاع في كل مرة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور الكرة البيضاء .

1 ــ عرف قانون الاحتمال للمتغير X ثم أحسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري

II) نقوم الآن بالسحب n مرة بنفس الكيفية السابقة .

ليكن X_n المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور الكرة البيضاء

1 ــ عرف قانون الاحتمال للمتغير X_n ثم أحسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري

III) ليكن Y_n المتغير العشوائي المعرف بــ $Y_n = \frac{X_n}{n}$ الذي يمثل تونرات ظهور القريصة البيضاء

عرف قانون احتمال المتغير Y_n و أحسب أمله الرياضياتي

الحــل ــ 8

عملية سحب كرة من الصندوق لها مخرجين فقط هما :

B : الكرة بيضاء باحتمال $p = 1/5$

$\overline{B}$: الكرة سوداء باحتمال $1 - p = 4/5$

إذن : عملية سحب n كرات على التوالي بارجاع هو تكرار هذه التجربة n مرة منه النتائج التالية :

I) سحب 6 كرات على التوالي بارجاع إذن $n = 6$

X هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الكرات البيضاء المسحوبة

إذن : X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه $n = 6$ و $p = 1/5$

منه : $E(X) = n\,p = 6/5$

$$Var(X) = n\,p(1-p) = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

II) نقوم بالسحب n مرة إذن : المتغير X_n الذي يعبر عن عدد الكرات البيضاء المسحوبة يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 1/5$

منه : $E(X_n) = n\,p = n/5$

$$Var(X_n) = n\,p(1-p) = \frac{n}{5}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4\,n}{25}$$

$$\sigma(X_n) = \sqrt{Var(X_n)} = \sqrt{\frac{4\,n}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{n}$$

III) $$Y_n = \frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \times X_n$$

بما أن $1/n$ ثابت و X_n يتبع قانون ثنائي الحد $B(n\,;\,1/5)$ فإن حسب الخواص :

$$E(Y_n) = E\left(\frac{1}{n} \times X_n\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$Var(Y_n) = Var\left(\frac{1}{n} \times X_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 . \frac{4\,n}{25} = \frac{4}{25\,n}$$

$$\sigma(Y_n) = \sqrt{Var(Y_n)} = \sqrt{\frac{4}{25\,n}} = \frac{2}{5\sqrt{n}}$$

التمرين ــ 9

p قانون احتمال معرف على المجال [1 ; 4] حيث f دالة كثافته معرفة بــ $f(x) = \frac{k}{x^2}$ (k عدد حقيقي)

المطلوب : عين قيمة k

الحـل ـ 9

تكون f دالة كثافة احتمال على المجال [1 ; 4] إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases} \int_1^4 f(x)\,dx = 1 \\ k > 0 \end{cases}$ أي $\int_1^4 \frac{k}{x^2}\,dx = 1$

أي $k\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

أي $k\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = 1$

أي $k\left[-\frac{1}{4}+1\right] = 1$

أي $\frac{3}{4}k = 1$

أي $k = \frac{4}{3}$

نتيجة : $k = \frac{4}{3}$ منه $f(x) = \frac{4}{3x^2}$ (f مستمرة و موجبة على المجال [1 ; 4])

التمرين ـ 10

ليكن p قانون احتمال معرف على المجال [-1 ; 3] و f دالة كثافته معرفة بـ $f(x) = k|x|$

المطلوب : عين قيمة k

الحـل ـ 10

تكون f دالة كثافة احتمال على المجال [-1 ; 3] إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases} \int_{-1}^3 f(x)\,dx = 1 \\ k > 0 \end{cases}$ أي $\int_{-1}^3 k|x|\,dx = 1$

أي $\int_{-1}^0 k|x|\,dx + \int_0^3 k|x|\,dx = 1$

أي $\int_{-1}^0 -kx\,dx + \int_0^3 kx\,dx = 1$

أي $-k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = 1$

أي $-k\left(0-\frac{1}{2}\right) + k\left(\frac{9}{2}-0\right) = 1$

أي $\frac{k}{2} + \frac{9k}{2} = 1$

أي $5k = 1$

أي $k = 1/5$

نتيجة : $k = \frac{1}{5}$ منه $f(x) = \frac{1}{5}|x|$

التمرين ـ 11

X متغير عشوائي معرف على المجال [0 ; π] و f دالة كثافة احتماله معرفة بـ $f(x) = k\sin x$

1 ـ عين قيمة k

2 ـ أحسب $p(x \geq \pi/3)$

3 ـ أحسب $\int_0^\pi x f(x)\,dx$ ماذا يمثل هذا التكامل ؟

الحـل ـ 11

1 ـ f دالة كثافة احتمال على المجال [0 ; π] إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 1 \\ k > 0\end{cases}$ أي $\int_0^{\pi} k \sin x\, dx = 1$

أي $k\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 1$

أي $k[-\cos x]_0^{\pi} = 1$

أي $k[1+1] = 1$

أي $k = \frac{1}{2}$

نتيجة : $k = \frac{1}{2}$ منه $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$

2 ـ $p\left(X \geq \frac{\pi}{3}\right) = p\left(\frac{\pi}{3} \leq X \leq \pi\right)$

$= \int_{\pi/3}^{\pi} f(x)\,dx$

$= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\, dx$

$= \frac{1}{2}[-\cos x]_{\pi/3}^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{3}{4}$

3 ـ $\int_0^{\pi} x f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x \sin x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$

ليكن $I = \int_0^{\pi} x \sin x\, dx$

نحسب I بالتجزئة كمايلي :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x\end{cases}$ منه $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x\end{cases}$

إذن : $I = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx$

$= -\pi\cos\pi + 0 + [\sin x]_0^{\pi}$

$= \pi$

نتيجة : $\int_0^{\pi} x f(x)\,dx = \frac{1}{2} I = \frac{\pi}{2}$

التكامل $\int_0^{\pi} x f(x)\,dx$ يمثل الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X أي $E(X) = \frac{\pi}{2}$

التمرين ـ 12

X متغير عشوائي يعبر عن عدد مأخوذ عشوائيا من المجال $[-3 ; 5]$

1 ـ ما هو قانون احتمال المتغير X

2 ـ أحسب امله الرياضياتي $E(X)$

3 ـ أحسب $p(X < 0)$ ؛ $p(X = 0)$ ؛ $p(X \geq 1/3)$ ؛ $p(X \leq 4/5)$

الحـل ـ 12

1 ـ X يتبع قانون توزيع ،نتظم على المجال $[-3 ; 5]$ حيث دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \frac{1}{5-(-3)} = \frac{1}{8}$

2 ـ حسب خواص الدرس : $E(X) = \frac{-3+5}{2} = 1$

3 –

$$p(X < 0) = p(-3 \leq X < 0)$$
$$= \int_{-3}^{0} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-3}^{0} \frac{1}{8}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}[x]_{-3}^{0}$$
$$= \frac{3}{8}$$

$$p(X = 0) = p(0 \leq X \leq 0)$$
$$= \int_{0}^{0} f(x)\,dx$$
$$= 0$$

$$p\left(X \geq \frac{1}{3}\right) = p\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 5\right)$$
$$= \int_{1/3}^{5} f(x)\,dx$$
$$= \int_{1/3}^{5} \frac{1}{8}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}[x]_{1/3}^{5}$$
$$= \frac{1}{8}\left[5 - \frac{1}{3}\right]$$
$$= \frac{14}{24}$$
$$= \frac{7}{12}$$

$$p\left(X \leq \frac{4}{5}\right) = p\left(-3 \leq X \leq \frac{4}{5}\right)$$
$$= \int_{-3}^{4/5} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}[x]_{-3}^{4/5}$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{4}{5} + 3\right]$$
$$= \frac{19}{40}$$

<u>التمرين – 13</u>

نأخذ عشوائيا عددا من المجال $[2 ; 13]$. ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على عدد أصغر من 10

B : الحصول على عدد جزؤه الصحيح زوجي .

<u>الحـل – 13</u>

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن العدد المأخوذ عشوائيا من المجال $[2 ; 13]$ اذن X يتبع قانون توزيع منتظم على المجال $[2 ; 13]$ دالة كثافة احتماله f معرفة بـــ $f(x) = \frac{1}{13-2} = \frac{1}{11}$

منه من أجل كل α و β من المجال $[2 ; 13]$ فإن إذا كان $\alpha < \beta$:

$$p(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{11} d x = \frac{1}{11}[x]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{11}$$

منه النتائج التالية :

$$p(A) = p(X \le 10) = p(2 \le X \le 10) = \frac{10-2}{11} = \frac{8}{11}$$

$$p(B) = p(2 \le X < 3) + p(4 \le X < 5) + p(6 \le X < 7) + p(8 \le X < 9) + p(10 \le X < 11) + p(12 \le X < 13)$$
$$= \frac{3-2}{11} + \frac{5-4}{11} + \frac{7-6}{11} + \frac{9-8}{11} + \frac{11-10}{11} + \frac{13-12}{11}$$
$$= \frac{6}{11}$$

تفسير : على المجال $[a ; b[$ إذا كان a زوجي فإن كل الأعداد التي تنتمي إلى المجال $[a ; b[$ لها جزء صحيح يساوي a أي زوجي ($a \in N$ و $b = a + 1$)

التمرين ــ 14

T متغير عشوائي يأخذ قيم في المجال $[0 ; +\infty[$ و يتبع قانونا أسيا وسيطه λ حيث $\lambda = 1$

1 ــ أرسم المنحنى البياني لدالة كثافة احتمال المتغير T

2 ــ فسر بيانيا الاحتمالين التاليين : $p(T \le 0,5)$ ؛ $p(T > 1)$

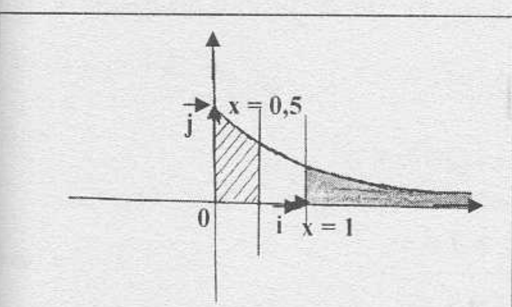
ثم أعط قيمة مقربة لكل منهما .

الحل ــ 14

1 ــ T يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 1$ إذن : دالة كثافة احتماله هي الدالة f المعرفة بـــ $f(x) = e^{-x}$ منه المنحنى التالي :

$x \in [0 ; +\infty[$ ؛ $f(0) = 1$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -e^{-x}$ إذن : f متناقصة تماما .



2 ــ التفسير الهندسي :

$$p(T \le 0,5) = p(0 \le T \le 0,5)$$
$$= \int_{0}^{0,5} f(x)\, d x$$
$$= \int_{0}^{0,5} e^{-x}\, d x$$
$$= S_1$$

حيث S_1 هي مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = 0,5$ إذن : $p(T \le 0,5)$ هي مساحة الجزء المخطط

$$p(T > 1) = \lim_{\alpha \to +\infty} p(1 \le T \le \alpha)$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{1}^{\alpha} f(x)\, d x$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{1}^{\alpha} e^{-x}\, d x$$
$$= S_2$$

حيث S_2 هي مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ و المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ حيث α يؤول إلى $+\infty$ إذن : $p(T > 1)$ هي مساحة الجزء الملون

القيم المقربة :

$$p(T \le 0,5) = \int_{0}^{0,5} e^{-x}\, d x = [-e^{-x}]_{0}^{0,5} = -e^{-0,5} + 1 = 0.3934$$

$$p(T > 1) = 1 - p(T \le 1)$$
$$= 1 - p(0 \le T \le 1)$$

$$= 1 - \int_0^1 e^{-x}\, dx$$
$$= 1 - [-e^{-x}]_0^1$$
$$= 1 - [-e^{-1} + 1]$$
$$= e^{-1}$$
$$= 0.3678$$

ملاحظة : يمكن حساب $p(T > 1)$ بطريقة أخرى كما يلي :

$$p(T > 1) = \lim_{\alpha \to +\infty} p(1 < T \le \alpha)$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_1^{\alpha} e^{-x}\, dx$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} [-e^{-x}]_1^{\alpha}$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} -e^{-\alpha} + e^{-1}$$

$= e^{-1}$ لأن $\lim_{\alpha \to +\infty} e^{-\alpha} = 0$

$= 0{,}3678$

التمرين ـــ 15

T متغير عشوائي يأخذ قيمه في المجال $[0 ; +\infty[$ و يتبع قانون احتمال أسي و سيطه $\lambda > 0$ من أجل أي قيمة لـــ t يكون للحادثة $(T < t)$ و الحادثة العكسية لها نفس الاحتمال ؟

الحــل ـــ 15

T يتبع قانون احتمال أسي إذن : دالة كثافة احتماله هي f حيث $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ليكن $t \in [0 ; +\infty[$

يكون للحادثتين $(T < t)$ و $(T \ge t)$ نفس الاحتمال إذا و فقط إذا كان $p(T < t) = 1/2$

لأن : $p(T < t) + p(T \ge t) = 1$

أي : $2\, p(T < t) = 1$ لأن $p(T < t) = p(T \ge t)$

منه : $p(T < t) = 1/2$

نتيجة : $p(T < t) = \frac{1}{2}$ يكافئ $\int_0^t f(x)\, dx = \frac{1}{2}$

يكافئ $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{2}$

يكافئ $\lambda \int_0^t e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{2}$

يكافئ $\int_0^t e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{2\lambda}$

يكافئ $\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t = \frac{1}{2\lambda}$

يكافئ $-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$

يكافئ $-e^{-\lambda t} + 1 = 1/2$

يكافئ $-e^{-\lambda t} = -1/2$

يكافئ $e^{-\lambda t} = 1/2$

يكافئ $-\lambda t = \ln(1/2)$

يكافئ $t = \frac{\ln(1/2)}{-\lambda}$

يكافئ $t = \frac{\ln 2}{\lambda}$ لأن $-\ln(1/2) = \ln 2$

نتيجة : يكون للحادثتين $(T < t)$ و $\overline{(T < t)}$ نفس الاحتمال إذا و فقط إذا كان $t = \frac{1}{\lambda} \ln 2$

التمرين ــ 16

T متغير عشوائي يأخذ قيمته في المجال $]0 ; +\infty[$ و يتبع قانون احتمال أسي وسيطه $\lambda > 0$

برهن أن احتمال الحادثة $\left(T > \frac{1}{\lambda}\right)$ مستقل عن λ ثم أعط قيمة مقربة له

الحـــل ــ 16

T يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ إذن : دالة كثافة احتماله هي : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

منه :

$$p\left(T > \frac{1}{\lambda}\right) = 1 - p\left(T \leq \frac{1}{\lambda}\right)$$
$$= 1 - \int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= 1 - \lambda \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda x} dx$$
$$= 1 - \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{1/\lambda}$$
$$= 1 - \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(1/\lambda)} + \frac{1}{\lambda}\right]$$
$$= 1 + e^{-1} - 1$$
$$= e^{-1}$$
$$= 0.367879441$$

التمرين ــ 17

g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$ و تحقق الشروط التالية :

g ليست معدومة
من أجل كل عددين حقيقيين موجبين t و h فإن $g(t+h) = g(t) \times g(h)$

1 ــ برهن أن $g'(t) = \alpha\, g(t)$ من أجل كل $t \geq 0$ حيث $\alpha = g'(0)$

2 ــ استنتج أن $g(t) = e^{\alpha t}$

الحـــل ــ 17

1 ــ لدينا من أجل كل عددين حقيقيين موجبين h و t فإن :

$$g(t+h) = g(h) \times g(t)$$

إذن : من أجل $h = 0$ فإن : $g(t) = g(0) \times g(t)$

منه : $g(0) = \frac{g(t)}{g(t)}$ أي $g(0) = 1$

من جهة أخرى حسب تعريف العدد المشتق عند t فإن :

$$g'(t) = \lim_{x \to t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t}$$

نضع $x = t + h$

إذن :

$$g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{t + h - t}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(t) \times g(h) - g(t)}{h}$$ لأن $g(t+h) = g(t) \times g(h)$
$$= \lim_{h \to 0} g(t)\left(\frac{g(h) - 1}{h}\right)$$
$$= \lim_{h \to 0} g(t)\left(\frac{g(h) - g(0)}{h - 0}\right)$$ لأن $g(0) = 1$
$$= g(t) \times g'(0)$$ لأن حسب التعريف فإن

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

نتيجة : $g'(t) = \alpha\, g(t)$ حيث $\alpha = g'(0)$

2 ــ لدينا : $g'(t) = \alpha\, g(t)$ معادلة تفاضلية من الشكل $y' = a\, y$

منه : $g(t) = c\, e^{\alpha t}$ حيث c ثابت حقيقي

لكن $g'(0) = \alpha$ حيث $g'(t) = \alpha\, c\, e^{\alpha t}$

إذن : $\alpha\, c = \alpha$

منه : $c = 1$

نتيجة : $g(t) = e^{\alpha t}$ حيث $\alpha = g'(0)$

التمرين ــ 18

إذا كانت مدة عمر تلفاز بالسنوات هو متغير عشوائي يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ حيث متوسط عمر التلفاز هو 14
أحسب مايلي :
1 ــ وسيط القانون الأسي λ .
2 ــ أوجد دالة كثافة احتمال هذا المتغير العشوائي .
3 ــ ما هو احتمال أن يكون عمر تلفاز ما أكبر من 20 سنة .

الحــل ــ 18

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عمر التلفاز

X يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

1 ــ متوسط عمر التلفاز هو 14 سنة إذن : $E(X) = 14$

$E(X) = 14$ يكافئ $\frac{1}{\lambda} = 14$

يكافئ $\lambda = \frac{1}{14}$

2 ــ $\lambda = \frac{1}{14}$ إذن : دالة كثافة احتمال المتغير X هي : $f(x) = \frac{1}{14}\, e^{-\frac{1}{14}x}$

3 ــ

$$\begin{aligned}
p(X > 20) &= 1 - p(0 \le X \le 20) \\
&= 1 - \int_0^{20} f(x)\, dx \\
&= 1 - \int_0^{20} \frac{1}{14}\, e^{-\frac{1}{14}x}\, dx \\
&= 1 - \frac{1}{14}\int_0^{20} e^{-\frac{1}{14}x}\, dx \\
&= 1 - \frac{1}{14}\left[-14\, e^{-\frac{1}{14}x}\right]_0^{20} \\
&= 1 - \frac{1}{14}\left[-14\, e^{-\frac{20}{14}} + 14\right] \\
&= e^{-\frac{20}{14}} \\
&\approx 0{,}23965
\end{aligned}$$

التمرين ــ 19

عمر مقاومة كهربائية يتبع قانون احتمال أسي نرمز له بــ X (معبرا عنه بالأيام) وسيطه $\lambda = 0{,}0012$
1 ــ ما هو متوسط عمر مقاومة كهربائية
2 ــ أحسب احتمال أن تعمر مقاومة مدة :
A) أكثر من 100 يوم .
B) أقل من 60 يوم .
3 ــ أحسب t (عدد الأشهر ذات 30 يوم) حتى يكون احتمال أن تعمر مقاومة ما مدة أقل من t شهرا هو 0,5

الحــل ــ 19

X يتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0{,}0012$ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = 0{,}0012\, e^{-0{,}0012x}$ منه النتائج التالية :

1 ـــ متوسط عمر مقاومة هو : $E(X) = \frac{1}{0,0012} = 833,33$

أي : متوسط عمر مقاومة هو 833 يوم و 8 ساعات

2 ـــ
$$p(A) = p(X \geq 100)$$
$$= 1 - p(X \leq 100)$$
$$= 1 - \int_0^{100} 0,0012\, e^{-0,0012x}\, dx$$
$$= 1 - 0,0012 \int_0^{100} e^{-0,0012x}\, dx$$
$$= 1 - 0,0012\left[-\frac{1}{0,0012} e^{-0,0012x}\right]_0^{100}$$
$$= e^{-0,0012 \times 100}$$
$$= e^{-0,12}$$
$$\approx 0,886$$

3 ـــ
$$p(B) = p(X \leq 60)$$
$$= \int_0^{60} 0,0012\, e^{-0,0012x}\, dx$$
$$= 0,0012\left[-\frac{1}{0,0012} e^{-0,0012x}\right]_0^{60}$$
$$= 0,0012\left[\frac{-1}{0,0012} e^{-0,0012 \times 60} + \frac{1}{0,0012}\right]$$
$$= 1 - e^{-0,072}$$
$$= 0,069$$

3 ـــ ليكن $t > 0$

$p(X \leq t) = 0,5$ يكافئ $\int_0^t 0,0012\, e^{-0,0012x}\, dx = 0,5$

يكافئ $0,0012\left[-\frac{1}{0,0012} e^{-0,0012x}\right]_0^t = 0,5$

يكافئ $1 - e^{-0,0012t} = 0,5$

يكافئ $-e^{-0,0012t} = -0,5$

يكافئ $-0,0012\, t = \ln(0,5)$

يكافئ $t = \frac{\ln(0,5)}{-0,0012}$

يكافئ $t = 577,62$

نتيجة : $t = 577,62$ يوم أي 19 أشهر و يوم واحد و ساعة و 40 دقيقة

التمرين ــ 20

في مركز بريد احدى البلديات مدة الانتظار عند الشباك بالدقائق هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0,07$

1 ــ ما هو متوسط وقت الانتظار

2 ــ أحسب احتمال الحوادث التالية : A) أن ننتظر أكثر من نصف ساعة

B) أن ننتظر أقل من 20 دقيقة .

الحــل ــ 20

دالة كثافة احتمال المتغير X هي $f(x) = 0,07\, e^{-0,07x}$

1 ـــ $E(X) = \frac{1}{0,07} = 14,285$

إذن : متوسط وقت الانتظار هو 14,285 دقيقة .

2 ـــ
$$p(A) = p(X \geq 30)$$
$$= 1 - p(X \leq 30)$$
$$= 1 - \int_0^{30} 0,07\, e^{-0,07x}\, dx$$

$$= 1 - 0,07\left[\frac{-1}{0,07} e^{-0.07x}\right]_0^{30}$$

$$= 1 + e^{-0.07\times 30} - 1$$

$$= 0,1224$$

$$p(B) = p(X \leq 20)$$

$$= \int_0^{20} 0,07\, e^{-0.07x}\, d\,x$$

$$= 0,07\left[\frac{-1}{0,07} e^{-0.07x}\right]_0^{20}$$

$$= 1 - e^{-0.07\times 20}$$

$$= 0.7534$$

التمرين – 21

نهتم بدراسة متوسط عمر جهاز إلكتروني (بالأسابيع) . نعبر عن هذه الوضعية بقانون احتمال p لمتوسط العمر من دون أعطال معرف على المجال $[0 ; +\infty[$ حيث احتمال أن يكون الجهاز في حالة جيدة طيلة المدة t هو $p([0 ; t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} d\,x$

أثبتت دراسة إحصائية أن 50% من الأجهزة المشغلة منذ 200 أسبوع لا زالت في حالة جيدة و بالتالي $p([0 ; 200[) = 0,5$

1 – برهن أن $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$

2 – ما هو احتمال أن يكون عمر جهاز ما أكبر من 300 أسبوع

3 – نقبل أن متوسط عمر الأجهزة معطى بالعلاقة $d_m = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} d\,x$

A) برهن أن $\int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} d\,x = \frac{-\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\alpha} + 1}{\lambda}$

B) استنتج d_m

الحل – 21

1 – $p([0 ; 200[) = 0,5$ يكافئ $\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} d\,x = 1/2$

يكافئ $[-e^{-\lambda x}]_0^{200} = 1/2$

يكافئ $-e^{-200\lambda} + 1 = 1/2$

يكافئ $-e^{-200\lambda} = -1/2$

يكافئ $-200\lambda = \ln(1/2)$

يكافئ $-200\lambda = -\ln 2$

يكافئ $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$

2 –

$$p([0 ; 300[) = \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x} d\,x$$

$$= [-e^{-\lambda x}]_0^{300}$$

$$= 1 - e^{-300\lambda}$$

$$= 1 - e^{\frac{-300 \ln 2}{200}}$$

$$= 0,6464$$

3 – A) ليكن $I = \int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} d\,x$

باستعمال التكامل بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = - e^{-\lambda x} \end{array}\right\}$

منه :

$$I = [- x e^{-\lambda x}]_0^\alpha + \int_0^\alpha e^{-\lambda x} dx$$

$$= - \alpha e^{-\lambda\alpha} + \left[- \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^\alpha$$

$$= - \alpha e^{-\lambda\alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{- \lambda \alpha e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\alpha} + 1}{\lambda}$$ و هو المطلوب

(B

$$d_m = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^\alpha \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{- \lambda \alpha e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\alpha} + 1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{-\lambda\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} - \lambda \alpha e^{-\lambda\alpha} = 0 \end{array}\right\}$

$$= \frac{200}{\ln 2}$$

$$\approx 288,539$$

نتيجة : متوسط عمر الأجهزة هو 288,539 أسبوع

<u>التمرين ــ 22</u>

في شركة متخصصة لانتاج الثلاجات أثبت مراقب نوعية أن الثلاجة يمكن أن تحوي عيبين : إما عيب في التلحيم باحتمال قدره 0,03 أو عيب إلكتروني باحتمال 0,02 حيث العيبين مستقلين .
نقول عن ثلاجة أنها غير صالحة إذا وجد فيها أحد العيبين

1 ــ برهن أن احتمال أن تكون ثلاجة ما غير صالحة هو 0,0494

2 ــ عرضت الشركة في سوق ما 800 ثلاجة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق الثلاجات المعروضة للبيع بعدد الثلاجات غير الصالحة

A) عرف قانون احتمال المتغير X

B) أحسب E(X) الأمل الرياضياتي لــ X

3 ــ إشترى أحد التجار 25 ثلاجة من هذه الشركة

A) أحسب احتمال وجود ثلاجتين غير صالحتين

B) تاجر آخر يريد شراء عدد من الثلاجات بشرط أن يكون احتمال حصوله على ثلاجة غير صالحة على الأقل ; أقل من 50 %
أحسب أكبر عدد من الثلاجات يمكن أن يشتريها هذا التاجر

4 ــ Y هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل ثلاجة من هذه الشركة بمدة صلاحيتها(مقدرا بالأيام)
إذا علمت أن Y يتبع قانون أسي وسيطه 0,0007 على المجال $[0 ; +\infty[$
أحسب احتمال أن تكون مدة صلاحية ثلاجة ما تتراوح بين 700 و 1000 يوم .

<u>الحـل ــ 22</u>

1 ــ لتكن الحوادث : S : الثلاجة ذات عيب في التلحيم .
E : الثلاجة ذات عيب الكتروني .
N : الثلاجة غير صالحة

لدينا :

$$p(N) = p(S \cup E)$$

$$= p(S) + p(E) - p(S \cap E)$$

$$= p(S) + p(E) - p(S) \times p(E)$$ لأن الحادثتين E و S مستقلتين

$$= 0,03 + 0,02 - 0,03 \times 0,02$$

$$= 0,0494$$

2 ــ كل ثلاجة يمكن أن تكون في مخرجين فقط هما :

N : الثلاجة غير صالحة باحتمال $p = 0,0494$

$\overline{N}$: الثلاجة صالحة باحتمال $1 - p = 0,9506$

A) إذن : إذا اعتبرنا X متغير عشوائي يعبر عن عدد الثلاجات غير الصالحة من بين 800 ثلاجة فإن X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 800$ و $p = 0,0494$

B) $E(X) = n\,p = 800(0,0494) = 39,52$

3 ــ A) نعتبر T المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الثلاجات غير الصالحة من بين 25 ثلاجة إذن : T يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 25$ و $p = 0,0494$

منه : $p(T = 2) = C_{25}^{2}\,(0,0494)^2(0,9506)^{23}$

$= 0,732108(0,9506)^{23}$

B) ليكن S المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الثلاجات غير الصالحة من بين n ثلاجة إذن : S يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0,0494$

الحادثة ثلاجة غير صالحة على الأقل هي الحادثة العكسية لــ كل الثلاجات صالحة منه الاحتمال هو : $1 - p(S = 0)$

$1 - p(S = 0) \leq 50\,\%$ يكافئ $1 - C_n^0\,(0,9506)^n \leq 1/2$

يكافئ $-(0,9506)^n \leq -1/2$

يكافئ $(0,9506)^n \geq 1/2$

يكافئ $n \ln(0,9506) \geq \ln(1/2)$

يكافئ $n \leq \dfrac{\ln(1/2)}{\ln(0,9506)}$ لأن $\ln(0,9506) < 0$

يكافئ $n \leq 13,6818$

يكافئ $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13\}$

إذن : أكبر عدد من الثلاجات يمكن للتاجر أن يشتريها هو 13

4 ــ دالة كثافة احتمال Y هي $f(x) = 0,0007\,e^{-0,0007x}$

منه : $p(700 \leq Y \leq 1000) = \displaystyle\int_{700}^{1000} 0,0007\,e^{-0,0007x}\,dx$

$= [-e^{-0,0007x}]_{700}^{1000}$

$= -e^{-0,0007\times1000} + e^{-0,0007\times700}$

$= e^{-0.49} - e^{-0.7}$

$= 0,11604$

التمرين ــ 23

يحتوي صندوق على كرات لا نفرق بينها عند اللمس و موزعة كمايلي : 10 % منها خضراء و عدد الكرات البيضاء هو 3 مرات عدد الكرات الخضراء

يسحب لاعب من الصندوق كرة عشوائيا :

إذا كانت الكرة حمراء يأخذ ربحا قاعديا

إذا كانت الكرة بيضاء يأخذ مربع الربح القاعدي

إذا كانت الكرة خضراء يخسر مكعب الربح القاعدي

I) نفرض أن الربح القاعدي هو 20 DA

1 ــ أكتب قانون احتمال المتغير X الذي يعبر عن مبلغ الربح

2 ــ أحسب الربح المتوسط المأمول .

II) نريد تعيين g_0 قيمة الربح القاعدي حتى يكون أمل الربح أكبر ما يمكن

ليكن x الربح القاعدي بالدينار .

1 ــ أثبت أن المسألة تؤول إلى دراسة النهايات الحدية للدالة f المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بــ

$$f(x) = -0,1\,x^3 + 0,3\,x^2 + 0,6\,x$$

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ ثم استنتج قيمة g_0

الحــل ــ 23

لتكن الحوادث التالية : R : سحب كرة حمراء

B : سحب كرة بيضاء

V : سحب كرة خضراء

10 % من الكرات خضراء إذن $p(V) = 0,1$

عدد الكرات البيضاء هو 3 مرات عدد الكرات الخضراء إذن : $p(B) = 3\,p(V) = 0,3$

نتيجة : $p(R) = 1 - [p(V) + p(B)] = 1 - 0,4 = 0,6$

I) 1 ـــ القيم الممكنة لـــ X هي : $\{20 ; 400 ; -8000\}$

قانون احتمال المتغير X :

X_i	20	400	- 8000
$p(X = X_i)$	0,6	0,3	0,1

2 ـــ الربح المتوسط المأمول :

$$E(x) = 20(0,6) + 400(0,3) - 8000(0,1) = 12 + 120 - 800 = -668$$

ملاحظة : الأمل الرياضياتي سالب أي خسارة (ليست في صالح الأعب)

II) 1 ـــ ليكن G المتغير العشوائي الذي يعبر عن مبلغ الربح

القيم الممكنة لـــ G هي $\{x ; x^2 ; -x^3\}$ حيث x هو الربح القاعدي ($x \in [0 ; +\infty[$)

منه قانون احتمال المتغير G هو كمايلي :

g_i	x	x^2	$-x^3$
$p(G = g_i)$	0,6	0,3	0,1

أمل الربح هو : $E(G) = 0,6\,x + 0,3\,x^2 - 0,1\,x^3$

نتيجة : $\begin{cases} E(G) = f(x) \\ x \in [0 ; +\infty[\end{cases}$

منه : يكون أمل الربح اعظميا اذا وفقط اذا كان لـــ f قيمة حدية أعظمية على المجال $]0 ; +\infty[$

2 ـــ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$:

f مستمرة على $[0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(0) = 0$

$f'(x) = -0,3\,x^2 + 0,6\,x + 0,6 = 0,3(-x^2 + 2\,x + 2)$

إشارة f ' على $[0 ; +\infty[$

$\Delta = 4 + 8 = 12$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$:

x	0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1,8392	↘	$-\infty$

$$f(1+\sqrt{3}) = 0{,}6(1+\sqrt{3}) + 0{,}3(1+\sqrt{3})^2 - 0{,}1(1+\sqrt{3})^3 \approx 1.8392$$

نتيجة : يكون أمل الربح أكبر ما يمكن قيمته 1.8392 من أجل قيمة الربح القاعدي $g_0 = 1+\sqrt{3} \approx 2{,}7320$ DA

التمرين ـ 24

في دراسة أعدتها مؤسسة للكهرباء عن الأخطار التي يتعرض لها عمالها تبين أن كل عامل معرض إلى خطرين رئيسيين هما :
الخطر A : سقوط العامل من العمود الكهربائي باحتمال 0,03 و الخطر B : تعرض العامل لصعق كهربائي باحتمال 0,17
نقول عن عامل أنه مصاب إذا تعرض إلى أحد الخطرين. (باعتبار أن الخطرين مستقلين)
1 ـ نأخذ عشوائيا عامل من المؤسسة . أثبت أن احتمال أن يكون مصابا هو 0,1949
2 ـ تضم المؤسسة 500 عامل . ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد العمال المصابين في المؤسسة .
عرف قانون احتمال X. و أحسب أمله الرياضياتي .
3 ـ a) في فصل الشتاء شنلت المؤسسة فوجا مكون من 10 عمال للتدخل السريع .
أحسب احتمال أن يكون في هذا الفوج أكثر من عاملين مصابين .
b) حتى لا يؤثر عدد المصابون على أداء زملائهم فكرت إدارة المؤسسة في تشكيل فرع للتدخل السريع بحيث يكون احتمال وجود عامل مصاب على الأقل ; أقل من 50 % . فما هو أكبر عدد من العمال يمكن أن يضمه هذا الفرع .

الحل ـ 24

1 ـ لتكن S الحادثة " العامل مصاب"

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) \\ &= 0.03 + 0.17 - 0.03(0.17) \\ &= 0.1949 \end{aligned}$$

لأن الحادثتين A و B مستقلتين

2 ـ تجربة اختيار عامل لها مخرجين فقط هما :
S : باحتمال $p = 0{,}1949$: العامل مصاب
$\overline{S}$: باحتمال $1 - p = 0{,}8051$: العامل غير مصاب
إذن : بتكرار التجربة 500 مرة فإن المتغير X الذي يعبر عن عدد العمال المصابين يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه $n = 500$ و $p = 0{,}1949$
إذن : من أجل $0 \le k \le 500$ فإن $p(X=k) = C_{500}^{k}(0{,}1949)^k(0{,}8051)^{500-k}$
منه : $E(X) = n\,p = 500(0{,}1949) = 97{,}45$

3 ـ ليكن Y_n المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد العمال المصابين من بين n عامل
إذن : Y_n يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0{,}1949$
حيث $p(X=k) = C_n^k (0{,}1949)^k(0{,}8051)^{n-k}$ مع $0 \le k \le n$
a) إذا كان $n = 10$ نحصل على :

$$\begin{aligned} p(Y_{10} > 2) &= 1 - p(Y_{10} \le 2) \\ &= 1 - [p(Y_{10}=0) + p(Y_{10}=1) + p(Y_{10}=2)] \end{aligned}$$

لدينا :

$$p(Y_{10}=0) = C_{10}^{0}(0{,}1949)^0(0{,}8051)^{10} = (0{,}8051)^{10}$$

$$p(Y_{10}=1) = C_{10}^{1}(0{,}1949)(0{,}8051)^9 = 1{,}949(0{,}8051)^9$$

$$p(Y_{10}=2) = C_{10}^{2}(0{,}1949)^2(0{,}8051)^8 = 1{,}7093(0{,}8051)^8$$

نتيجة :

$$\begin{aligned} p(Y_{10} > 2) &= 1 - [(0{,}8051)^{10} + 1{,}949(0{,}8051)^9 + 1{,}7093(0{,}8051)^8] \\ &= 1 - (0{,}8051)^8[(0{,}8051)^2 + 1{,}5691 + 1{,}7093] \\ &\approx 0{,}307 \end{aligned}$$

b) الحادثة وجود عامل مصاب على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة لا يوجد أي عامل مصاب إذن :

$1 - p(Y_n = 0) \le 50\,\%$ يكافئ $1 - p(Y_n = 0) \le 1/2$

يكافئ $1 - \frac{1}{2} \le p(Y_n = 0)$

يكافئ $p(Y_n = 0) \ge 1/2$

يكافئ $C_n^0(0{,}1949)^0(0{,}8051)^n \ge 1/2$

يكافئ $(0,8051)^n \geq 0,5$

يكافئ $n\ln(0,8051) \geq \ln(0,5)$

يكافئ $n \leq \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,8051)}$

يكافئ $n \leq 3,197$

يكافئ $n \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$

نتيجة : أكبر عدد من العمال بمكن أن يضمه هذا الفوج هو 3

التمرين ــ 25

لاحظ مدير ثانوية ارتفاع عدد الغيابات و تكرارها عند بعض التلاميذ و عندما بحث في الأمر ، وجد أن أسباب الغياب تتمثل في المرض أو مشكل النقل .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن المدة الزمنية (بالأيام) التي يدرسها التلميذ أحمد دون أي غياب .

نقبل أن X يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 0,01$ حيث قانون الاحتمال معرف بــ :

$$p(X \leq \alpha) = \int_0^{\alpha} 0,01\, e^{-0,01x}\, dx$$

1 ــ أحسب احتمال أن تكون الفترة الدراسية دون غياب لأحمد هي :

a) محصورة بين 30 و 60 يوم

b) أكبر من 90 يوم

2 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \dfrac{x}{100} e^{-\frac{1}{100}x}\, dx$

3 ــ أحسب $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$ ماذا تمثل هذه النهاية .

4 ــ تضم هذه الثانوية N تلميذ حيث الفترات الدراسية التي يقضيها كل تلميذ دون غياب عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى تتبع نفس القانون الأسي ذو الوسيط $\lambda = \dfrac{1}{100}$

d عدد حقيقي موجب نضع Y_d المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد التلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d (بالأيام)

a) برهن أن Y_d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه N و $e^{-\lambda d}$

b) أعط العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d بالأيام .

الحــل ــ 25

1 ــ

$$\begin{aligned}
p(a) &= p(30 \leq X \leq 60)\\
&= \int_{30}^{60} 0,01\, e^{-0,01x}\, dx\\
&= [-e^{-0,01x}]_{30}^{60}\\
&= -e^{-0,01(60)} + e^{-0,01(30)}\\
&= 0,1920
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(b) &= p(X \geq 90)\\
&= 1 - p(X \leq 90)\\
&= 1 - \int_0^{90} 0,01\, e^{-0,01x}\, dx\\
&= 1 - [-e^{-0,01x}]_0^{90}\\
&= 1 - [-e^{-0,01(90)} + 1]\\
&= 0,4065
\end{aligned}$$

2 ــ

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x}{100} e^{-\frac{1}{100}x}\, dx$$

التكامل بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} \end{cases}$ منه: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\frac{1}{100}x} \end{cases}$

إذن :
$$I(\alpha) = \left[-x e^{-\frac{1}{100}x}\right]_0^\alpha + \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{100}x} dx$$
$$= -\alpha e^{-\frac{1}{100}\alpha} + \left[-100 e^{-\frac{1}{100}x}\right]_0^\alpha$$
$$= -\alpha e^{-0,01\alpha} - 100 e^{-0,01\alpha} + 100$$

3 ـ $$\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} -\alpha e^{-0,01\alpha} - 100 e^{-0,01\alpha} + 100 = 100$$

العدد $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 100$ يمثل الأمل الرياضياتي للمتغير X

أي الفترة المتوسطة بالأيام التي يدرس فيها تلميذ دون أي غياب .

4 ـ احتمال أن يكون تلميذ لم يتغيب طيلة الفترة d هو :
$$p(X \geq d) = 1 - p(X \leq d)$$
$$= 1 - \int_0^d 0,01 e^{-0,01x} dx$$
$$= 1 - [-e^{-0,01x}]_0^d$$
$$= 1 - [-e^{-0,01d} + 1]$$
$$= e^{-0,01d}$$

a) إذن : Y_d الذي يعبر عن عدد التلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه N و $p = e^{-0,01d}$

إذن : من أجل $0 \leq k \leq N$:
$$p(Y_d = k) = C_N^k (e^{-0,01d})^k (1 - e^{-0,01d})^{N-k}$$

b) $E(Y_d) = N p = N e^{-0,01d}$

إذن : العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d هو $[N e^{-0,01d}] + 1$ حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح لــ x

(لأن عدد التلاميذ المطلوب هو عدد طبيعي)

<u>التمرين ــ 26</u>

مدة صلاحية آلة بالساعات تتبع قانون أسي p معرف على $[0 ; +\infty[$ وسيطه $\lambda = 0,0005$ حيث احتمال أن تتعطل الآلة قبل الزمن t هو : $p([0 ; t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

1 ــ هل احتمال أن تكون مدة صلاحية آلة أكبر من 2500 ساعة هو :

a) $e^{\frac{2500}{2000}}$ b) $e^{\frac{-5}{4}}$ c) $1 - e^{\frac{-2500}{2000}}$ d) $e^{\frac{-2000}{2500}}$

2 ــ مدة الصلاحية المتوسطة للآلة معطاة بالعلاقة $E = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^\alpha \lambda x e^{-\lambda x} dx$

هل مدة الصلاحية المتوسطة بالساعات هي :

a) 3500 b) 2000 c) 2531,24 d) 3000

<u>الحـل ــ 26</u>

1 ــ
$$p([2500 ; +\infty[) = 1 - p([0 ; 2500[)$$
$$= 1 - \int_0^{2500} 0,0005 e^{-0,0005x} dx$$
$$= 1 - [-e^{-0,0005x}]_0^{2500}$$
$$= e^{-0,0005 \times 2500}$$
$$= e^{-1,25}$$
$$= e^{\frac{-5}{4}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) $e^{\frac{-5}{4}}$

2 ـ $E = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx$

باستعمال التكامل بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{cases}$

منه :

$$\int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\alpha e^{-\lambda \alpha} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= -\alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}$$

نتيجة :

$$E = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left(-\alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{0.0005}$$

$$= 2000$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) 2000

BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي



3e Année Secondaire : Mathématiques

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

سلسلة هبـاج

Kimou.

الرياضيـات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمـاذج للبكالوريا

الجزء الرابع



تقني رياضي ـ رياضيات ـ علوم تجريبية



يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكــل الشعب العلمية منها و التكنولوجية .

ــ محتــوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

ــ يشمل هذا الجزء من السلسلة على أربعة محاور من البرنامج :

■ المتتاليات
■ الإحتمالات الشرطية
■ قوانين الإحتمالات
■ الموافقات في Z

ــ يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

ــ كما حرصت أن أعالج في نهايــة كل درس ، مجموعة تطبيقــات للتصحيح الذاتــي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

ــ كما حرصت أن أعالج في نهايــة كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

آملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هبــاج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 81 52 26 0773

المتتاليات العددية

تذكير :

نسمي متتالية عددية حقيقية $(u_n)_{n \geq n_0}$ كل دالة عددية ترفق بكل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ العدد الحقيقي u_n (n_0 عدد طبيعي معطى)

اتجاه تغير متتالية عددية :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية

- ✓ تكون (u_n) متزايدة (على الترتيب متزايدة تماما) إذا و فقط اذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} \geq u_n$ (على الترتيب من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} > u_n$)
- ✓ تكون (u_n) متناقصة (على الترتيب متناقصة تماما) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} \leq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1} < u_n$)
- ✓ تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} = u_n$
- ✓ إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة تماما أو متناقصة تماما أو متزايدة أو متناقصة نقول أن المتتالية (u_n) رتيبة

المتتاليات الحسابية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية و α عدد حقيقي ثابت

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية ذات الأساس α و الحد الأول u_{n_0} إذا و فقط إذا تحققت إحدى الشروط التالية :

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+1} = u_n + \alpha$

2 ــ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+2} + u_n = 2\,u_{n+1}$

3 ــ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)\,\alpha$

ملاحظة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية حسابية فإن :

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots\ldots + u_n = (n - k + 1)\left(\frac{u_k + u_n}{2}\right)$$

المتتاليات الهندسية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية و q عدد حقيقي ثابت

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية ذات الأساس q و الحد الأول u_{n_0} إذا و فقط إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+1} = q \cdot u_n$

2 ــ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+2} \times u_n = (u_{n+1})^2$

3 ــ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$

ملاحظة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية هندسية ذات الأساس q حيث $q \neq 1$ فإن :

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots\ldots + u_n = u_k\left(\frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}\right)$$

نهاية متتالية :

إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية حسابية أساسها α فإن :

1 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذا كان $\alpha > 0$

2 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ إذا كان $\alpha < 0$

3 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_k$ إذا كان $\alpha = 0$ (المتتالية ثابتة)

إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية هندسية أساسها q فإن :

1 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ إذا كان $-1 < q < 1$

2 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذا كان $q > 1$ و $u_k > 0$

3 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ إذا كان $q > 1$ و $u_k < 0$

4 ــ نهاية المتتالية (u_n) غير موجودة إذا كان $q \leq -1$

5 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_k$ إذا كان $q = 1$ (المتتالية ثابتة)

نشاط ــ 1

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_{n+1} - u_n$

1 ــ أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب حدها الأول و أساسها

2 ــ استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحـل ــ 1

1 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= (u_n - 5n - 1) - u_n \\ &= -5n - 1 \\ &= -5(n - 0) - 1 \end{aligned}$$

نتيجة : (v_n) متتالية حسابية أساسها $q = -5$ و حدها الأول $v_0 = -1$

2 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = u_{n+1} - u_n$

لنكتب هذه المساواة من أجل $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$ ...... كما يلي :

$$n \text{ مساواة مختلفة } \begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ v_1 = u_2 - u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ v_2 = u_3 - u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots n \end{cases}$$

نجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_{n-1} = -u_0 + u_n \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

من جهة أخرى لدينا $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2}(n - 1 + 1)$ هو مجموع حدود متتابعة من المتتالية الحسابية (v_n)

إذن :

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_{n-1} &= \left(\frac{n}{2}\right)\left[-1 - 5(n-1) - 1\right] \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)(-5n + 3) \end{aligned}$$

و عليه المساواة (α) تصبح : $\frac{n}{2}(-5n + 3) = u_n - u_0$

أي : $u_n = \frac{n}{2}(-5n + 3) + u_0$

أي : $u_n = \frac{n}{2}(-5n + 3) + 3$

تحقيق : لنحسب الحدود u_1 و u_2 بطريقتين مختلفتين كمايلي :

$u_1 = u_0 - 5(0) - 1 = 3 - 1 = 2$,

$u_2 = u_1 - 5(1) - 1 = 2 - 5 - 1 = -4$

من جهة أخرى :

$u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(-5 + 3) + 3$ إذن : $\frac{1}{2}(-5(1) + 3) + 3 = \frac{-2}{2} + 3 = 2$

$u_2 = \left(\frac{2}{2}\right)(-5(2) + 3) + 3$ إذن : $\frac{2}{2}(-5(2) + 3) + 3 = -10 + 3 + 3 = -4$

نشاط ــ 2

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = 2$ و العلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - 3$

1 ــ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول

2 ـ أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
3 ـ ماهو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟
4 ـ أحسب نهاية v_n

الحـل ـ 2

4 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$
$$= \left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) - 3$$
$$= \frac{1}{3}u_n - 1$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)(u_n - 3)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)v_n \quad \text{لأن : } v_n = u_n - 3$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1/3$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = -1$

2 ـ (v_n) هندسية، $v_0 = -1$، $q = 1/3$ إذن : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا : $v_n = u_n - 3$

إذن : $u_n = v_n + 3$

منه : $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ و هو المطلوب

3 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n\left[-\frac{1}{3} + 1\right]$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)$$

لدينا : $v_{n+1} - v_n > 0$

إذن : المتتالية (v_n) متزايدة تماما

4 ـ $$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= 0 \quad \text{لأن } -1 < 1/3 < 1$$

تقارب متتالية عددية :

$(u_n)_{n \in IN}$ متتالية عددية . ℓ عدد حقيقي ثابت

✓ إذا كان $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو ℓ

✓ إذا كان $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة نحو $+\infty$

✓ إذا كان $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة نحو $-\infty$.

تذكير : لتكن (u_n) متتالية معرفة بـــ $u_n = f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a ; +\infty[$

حيث a عدد حقيقي . ليكن ℓ عدد حقيقي

✓ إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

✓ إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

✓ إذا كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ فإن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

نشاط ـــ 3

$(u_n)_{n \in IN}$ متتالية معرفة على IN بـــ $u_n = \sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}$ عين نهاية هذه المتتالية

الحـل ـــ 3

نعرف الدالة العددية f على المجال $[0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x+3}{x+1}}$

إذن : $f(n) = \sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}$ أي $f(n) = u_n$

لكن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$ و هو المطلوب

المتتاليات المحدودة :

تعريف : (u_n) متتالية عددية معرفة على IN

✓ إذا وجد عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq A$ نقول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد A أو A عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

✓ إذا وجد عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ نقول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد B أو B عنصر حاد من الأسفل للمتتالية (u_n)

✓ إذا كانت (u_n) متتالية محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها متتالية محدودة

✓

مثال : لتكن $(u_n)_{n>0}$ متتالية عددية معرفة على IN^* بـــ $u_n = \dfrac{4n}{n+3}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : ، $u_n - 1 = \dfrac{4n}{n+3} - 1$

$= \dfrac{4n - n - 3}{n+3}$

$= \dfrac{3(n-1)}{n+3}$

بماأن $n > 0$ أي $n \geq 1$ فإن $n - 1 \geq 0$

منه : $3(n-1) \geq 0$ أي $\dfrac{3(n-1)}{n+3} \geq 0$

إذن : $u_n - 1 \geq 0$

أي : $u_n \geq 1$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

منه حسب التعريف فإن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي 1

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n - 4 = \dfrac{4n}{n+3} - 4$

$= \dfrac{4n - 4n - 12}{n+3}$

$= \dfrac{-12}{n+3}$

بماأن $n + 3 > 0$ فإن $\dfrac{-12}{n+3} < 0$

أي $u_n - 4 < 0$

أي $u_n < 4$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

إذن : حسب التعريف المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي 4

نتيجة : $\begin{cases} (u_n) \text{ متتالية محدودة من الأسفل بـــ } 1 \\ (u_n) \text{ متتالية محدودة من الأعلى بـــ } 4 \end{cases}$

إذن : (u_n) متتالية محدودة

مبرهنة :

1) إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة

2) إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة

المتتاليات المتجاورة

تعريف : تكون متتاليتان متجاورتان إذا و فقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و كان الفرق بينهما يؤول إلى الصفر

مثال :

(u_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

(v_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ لأن $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$

و عليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و لدينا : $v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \quad \text{لأن} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ لأن $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

و عليه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

لدينا أيضا $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ إذن $v_n - u_n = \frac{1}{n}$

منه $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

خلاصة :
المتتالية (u_n) متزايدة
المتتالية (v_n) متناقصة
$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

مبرهنة :

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية

<u>**نشاط ـ 4**</u>

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان بـ : $u_0 = 12$; $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

1 ـ أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب حدها الأول و أساسها

2 ـ أكتب عبارة w_n بدلالة n ثم أحسب نهاية w_n

3 ـــ أثبت أن (t_n) متتالية ثابتة يطلب نهايتها

4 ـــ أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

5 ـــ استنتج نهاية كل من u_n و v_n

الحــل ـــ 4

1 ـــ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$$= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

$$= \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n)$$

$$= \frac{1}{12} w_n$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1/12$ و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 11$

2 ـــ (w_n) متتالية هندسية حدها الأول $w_0 = 11$ و أساسها $q = 1/12$ إذن عبارة حدها العام $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 11\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ لأن : $-1 < 1/12 < 1$

3 ـــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1}$

$$= 3\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) + 8\left(\frac{u_n + 3v_n}{4}\right)$$

$$= u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n)$$

$$= 3u_n + 8v_n$$

$$= t_n$$

إذن : (t_n) متتالية ثابتة

أي كل حدودها متساوية و تساوي t_0 : $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 36 + 8 = 44$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t_0 = 44$

4 ـــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n$

$$= \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3}$$

$$= \frac{2v_n - 2u_n}{3}$$

$$= \frac{-2}{3}(u_n - v_n)$$

$$= -\frac{2}{3} w_n$$ لأن : $w_n = u_n - v_n$

$$= -\frac{2}{3}\left[11\left(\frac{1}{12}\right)^n\right]$$

$$= \frac{-22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

بماأن $\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ لأن $\frac{-22}{3} < 0$

منه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n$

$$= \frac{u_n + 3\, v_n - 4\, v_n}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\,(u_n - v_n)$$
$$= \frac{1}{4}\, w_n$$
$$= \frac{1}{4} \times 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

بماأن $\frac{1}{4} \times 11\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$

أي المتتالية (v_n) متزايدة تماما

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال (2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

خلاصة : المتتالية (u_n) متناقصة
المتتالية (v_n) متزايدة
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن : حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

5 ـ بماأن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فإنهما متقاربتان و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

منه $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\, u_n + 8\, v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3\, u_n + 8\, u_n$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

$$= \lim_{n \to +\infty} 11\, u_n$$

لكن $t_n = 3\, u_n + 8\, v_n$ و $t_n = 44$ لأن المتتالية (t_n) ثابتة .

أي : $44 = 3\, u_n + 8\, v_n$ منه : $44 = \lim\limits_{n \to +\infty} 11\, u_n$

أي : $44 = 11 \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـــ 1

(u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n

على الترتيب بـــ : $v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$ و $w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$

بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) حسابيتان يطلب تعين أساسيهما بدلالة r

الحـل ـــ 1

(u_n) متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_0 اذن حدها العام : من أجل كل عدد طبيعي n هو $u_n = u_0 + n\,r$

إذن : $u_{3n} = u_0 + 3\,n\,r$

منه : $\begin{cases} v_n = \frac{3}{5}(u_0 + n\,r) - \frac{1}{2} \\ w_n = u_0 + 3\,n\,r + \sqrt{7} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} v_n = \frac{3}{5}u_0 - \frac{1}{2} + \frac{3}{5}r\,n \\ w_n = u_0 + \sqrt{7} + 3\,r\,n \end{cases}$

منه : (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{3}{5}r$ و حدها الأول $v_0 = \frac{3}{5}u_0 - \frac{1}{2}$

(w_n) متتالية حسابية أساسها $3\,r$ و حدها الأول $w_0 = u_0 + \sqrt{7}$

التمرين ـــ 2

أحسب أقياس زوايا مثلث قائم حيث هذه الأقياس تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية

الحـل ـــ 2

المثلث قائم إذن إحدى زوياه قائمة و قيسها إذن $90°$

ليكن a و b قيسي الزاويتين الأخريين من هذا المثلث حيث $a < b < 90°$

نعلم أن $a + b + 90° = 180°$ ....(1)

إذا كان a ، b ، $90°$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية فليكن أساسها r إذن : $b = a + r$ و $90 = a + 2\,r$

المساواة (1) تصبح : $a + a + r + a + 2\,r = 180°$

أي : $3\,a + 3\,r = 180°$

أي : $3(a + r) = 180°$

أي : $a + r = 60°$

أي : $b = 60°$

منه : $a = 30°$

نتيجة : الأقياس المطلوبة هي على الترتيب $30°$ ؛ $60°$ ؛ $90°$

التمرين ـــ 3

(v_n) متتالية عددية معرفة بـــ $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$

1 ـــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n > 0$

2 ـــ نعرف المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـــ $u_n = \frac{1}{v_n}$

بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب أساسها

الحـل ـــ 3

1 ـــ نستعمل الإستدلال بالتراجع

من أجل $n = 0$ لدينا $v_0 = 1$ و $1 > 0$ إذن : الخاصية محققة

من أجل $n = 1$: $v_1 = \dfrac{v_0}{v_0 + 1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ و $1/2 > 0$ إذن الخاصية محققة

لنفرض أن $v_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $v_{n+1} > 0$ ؟

لدينا $v_n > 0$ إذن : $v_n + 1 > 1$ و خاصة $v_n + 1 > 0$

منه : $\dfrac{1}{v_n + 1} > 0$

إذن $\dfrac{v_n}{v_n + 1} > 0$

أي : $v_{n+1} > 0$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n > 0$

2 ــ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{v_n}{v_n + 1}} = \frac{v_n + 1}{v_n} = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + u_n$$

إذن : (u_n) متتالية حسابية أساسها 1

__التمرين ــ 4__

(u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 ــ أكتب u_n بدلالة n

2 ــ أحسب $u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{20}$

__الحـل ــ 4__

1 ــ (u_n) متتالية حسابية إذن : $u_n = u_1 + (n-1)r$ حيث r هو الأساس

منه : $u_n = -2 + 3(n-1)$

أي : $u_n = 3n - 5$

2 ــ $u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{20} = \dfrac{20}{2}(u_1 + u_{20})$ مجموع 20 حدود متتابعة

$$= 10(-2 + 3(20) - 5)$$
$$= 10(60 - 7)$$
$$= 530$$

__التمرين ــ 5__

أحسب المجموع : $\mathbf{S = \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} + 2 + \dfrac{5}{2} + 3 + \dots\dots + 10}$

__الحـل ــ 5__

لاحظ أن الأعداد 1/2 ؛ 1 ؛ 3/2 ؛ 2 ؛ 5/2 ؛ 3 ؛ ..... 10 هي حدود متتابعة من متتالية حسابية (u_n) أساسها 1/2

نضع $u_1 = 1/2$

إذن : $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(n-1)$

أي : $u_n = \dfrac{1}{2}n$

لنبحث عن رتبة الحد الذي قيمته 10

لدينا : $u_n = 10$ أي $\frac{1}{2}n = 10$ أي : $n = 20$

إذن : عدد الحدود هو 20

منه : $S = \frac{20}{2}\left(\frac{1}{2} + 10\right)$

أي : $S = 5 + 100 = 105$

التمرين ــ 6

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 ــ أكتب u_n بدلالة n

2 ــ أحسب المجموع $u_1 + u_2 + ... + u_7$

لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $v_n = u_{2n}$

3 ــ أحسب المجموع $v_1 + v_2 + ... + v_n$ بدلالة n

الحـل ــ 6

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2(3)^{n-1}$

2 ــ $u_1 + u_2 + ... + u_7 = u_1\left(\frac{3^7 - 1}{3 - 1}\right)$

$= -2\left(\frac{3^7 - 1}{2}\right)$

$= -(3^7 - 1)$

$= 1 - 3^7$

3 ــ من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{2n}$

$= -2(3)^{2n-1}$

$= -2\left(\frac{1}{3}\right)(3)^{2n}$

$= \frac{-2}{3}(9)^n$

$= \frac{9}{9} \times \left(\frac{-2}{3}\right)(9)^n$

$= 9\left(\frac{-2}{3}\right)(9)^{n-1}$

$= -6(9)^{n-1}$

منه : (v_n) متتالية هندسية أساسها 9 و حدها الأول $v_1 = -6$

إذن : $v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1\left(\frac{9^n - 1}{9 - 1}\right)$

$= -6\left(\frac{9^n - 1}{8}\right)$

$= \frac{-3}{4}(9^n - 1)$

التمرين ــ 7

(u_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة تماما حيث $u_0 = 2$ و $u_3 = 9u_1$

1 ــ عين أساس المتتالية (u_n)

2 ــ أحسب u_n بدلالة n

3 ــ أحسب بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

الحـل ــ 7

1 ــ ليكن k أساس هذه المتتالية حيث $k > 1$

لدينا : $u_1 = k\,u_0$ أي $u_1 = 2k$

و $u_2 = k\,u_1$ أي $u_2 = k(2k) = 2k^2$

و $u_3 = k\,u_2$ أي $u_3 = k(2k^2) = 2k^3$

من جهة أخرى $u_3 = 9\, u_1$ أي $2 k^3 = 9(2 k)$

أي $k^2 = 9$

أي : $k = 3$ أو $k = -3$

بماأن كل الحدود موجبة فإن أساس المتتالية موجب أي $k = 3$

2 ـــ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2(3)^n$

3 ـــ مجموع الحدود المتتابعة من متتالية هندسية :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = u_0\left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2}\right)$$

$$= -1(1 - 3^{n+1})$$

$$= 3^{n+1} - 1$$

التمرين ـــ 8

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

أوجد عدد طبيعي n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$

الحـل ـــ 8

لاحظ أن كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما أي من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$ و خاصة $u_n > -10^{-3}$

إذن يكفي تعين عدد طبيعي n حيث $u_n < 10^{-3}$ كمايلي :

لدينا $u_n < 10^{-3}$ أي $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$

أي : $\dfrac{1}{n^{3/2}} < \dfrac{1}{10^3}$

أي : $\dfrac{1}{n^{1/2}} < \dfrac{1}{10}$

أي : $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$

أي : $n > 100$

نتيجة : يكفي أن يكون $n_0 = 100$ حيث إذا كان $n > 100$ فإن $u_n < 10^{-3}$ و عليه $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$ و هو المطلوب

التمرين ـــ 9

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ $u_n = n\sqrt{n}$

أوجد عدد طبيعي n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n > 10^6$

الحـل ـــ 9

لدينا $u_n > 10^6$ أي : $n\sqrt{n} > 10^6$

أي : $n^{3/2} > 10^6$

أي : $n^{1/2} > 10^2$

أي : $n > 10^4$

إذن يكفي أن نأخذ $n_0 = 10^4$ حيث إذا كان $n > 10^4$ فإن $u_n > 10^6$

التمرين ـــ 10

(u_n) متتالية هندسية أساسها 1/2 و حدها الأول $u_0 = 3$

ابتداء من أي دليل n يكون $u_n < 10^{-5}$ ؟

الحـل ـــ 10

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3(1/2)^n$

إذن $u_n < 10^{-5}$ أي $3(1/2)^n < 10^{-5}$

أي : $(1/2)^n < \dfrac{1}{3 \times 10^5}$

أي : $2^n > 3 \times 10^5$

أي : $n > \log_2 (3 \times 10^5)$

أي : $n > \dfrac{\ln(3 \times 10^5)}{\ln(2)}$

أي : $n > \dfrac{\ln(3) + 5\ln(10)}{\ln(2)}$

أي : $n > 18,19$

إذن : يكفي أخذ $n_0 = 18$ حيث إذا كان $n > 18$ فإن $u_n < 10^{-5}$

التمرين – 11

أحسب نهايات المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية :

1 – $u_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$ 5 – $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n+3}}$

2 – $u_n = 2n - \dfrac{1}{n+1}$ 6 – $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+1}$

3 – $u_n = \dfrac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}$ 7 – $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$

4 – $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{2n+1}}$

الحـل – 11

لاحظ أن في كل حالة يمكن تعريف دالة f للمتغير الحقيقي x حيث $f(n) = u_n$
ثم حساب النهايات كمايتم حسابها في الدوال العددية كمايلي :

1 – $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n+2}{2n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n}{2n} = \dfrac{3}{2}$

2 – $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n - \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} 2n - \dfrac{1}{n} = +\infty$

3 – $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7n^2}{n^2} = 7$

4 – $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{3n+2}{2n+1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{3n}{2n}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

5 – $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n+3}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n^2}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

6 – $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = 0$

7 – $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n(\sqrt{n}+1)}{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{1} = +\infty$

التمرين – 12

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ $u_n = 5 - \dfrac{10}{n^2}$

من بين الأعداد الحقيقية التالية 0 ؛ 6 ؛ 4,999 ؛ 5 ؛ ماهي التي تمثل عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

الحـل – 12

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\dfrac{10}{n^2} > 0$ منه $-\dfrac{10}{n^2} < 0$

إذن : $5 - \frac{10}{n^2} \leq 5$ أي : $u_n \leq 5$

منه : كل من العددين الحقيقيين 5 و 6 تمثل عناصر حادة من الأعلى للمتتالية (u_n)

التمرين ــ 13

1 ــ أنجز جدول تغيرات الدالة f المعرفة على IR بــ : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2 ــ أثبت أن العدد 1/2 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 4$
بــ : $\frac{1}{n^2 - 5n + 6}$

الحــل ــ 13

1 ــ f معرفة على IR و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f قابلة للإشتقاق على IR و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = 2x - 5$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	$-\infty$		5/2		4	$+\infty$
f'(x)		−	0	+		
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	2	$+\infty$

$$f(5/2) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25 - 50 + 24}{4} = \frac{-1}{4}$$

2 ــ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]5/2 ; +\infty[$ و خاصة على المجال $]4 ; +\infty[$ و منه : فإن العدد w_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 4$ بــ $w_n = n^2 - 5n + 6$ يتزايد بتزايد n

إذن أصغر قيمة لــ w_n هي $w_4 = (4)^2 - 5(4) + 6 = 2$

منه : أكبر قيمة لــ $\frac{1}{w_n}$ هي $\frac{1}{w_4} = \frac{1}{2}$ (خواص المقلوب)

لكن $w_n = u_n$ إذن : $u_n \leq 1/2$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 4$

إذن : العدد 1/2 هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

التمرين ــ 14

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بــ : $u_n = \frac{-1}{2n + 4}$ ؛ $v_n = \frac{1}{n+1}$
أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم أوجد نهايتهما المشتركة

الحــل ــ 14

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2(n+1) + 4} - \frac{-1}{2n + 4}$$
$$= \frac{-1}{2n + 6} + \frac{1}{2n + 4}$$
$$= \frac{-2n - 4 + 2n + 6}{(2n + 6)(2n + 4)}$$
$$= \frac{2}{(2n + 6)(2n + 4)}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n + 1 + 1} - \frac{1}{n + 1}$$

$$= \frac{n+1-(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

لدينا أيضا :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-(n+1)-(2n+4)}{(2n+4)(n+1)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-3n}{2n^2}$$

$$= 0$$

خلاصة : (u_n) متتالية متزايدة تماما ، (v_n) متتالية متناقصة تماما ، $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

و $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{2n+4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

و $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

التمرين – 15

(u_n) و (v_n) **متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ** $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ **و** $v_n = 3 - \frac{5}{n}$

هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

الحـل – 15

لاحظ أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأن العدد $(-1)^n$ موجب إذا كان n زوجي و سالب إذا كان n فردي

و عليه فالمتتاليتان (u_n) و (v_n) لا يمكن أن تكونا متجاورتان حسب التعريف

حذار: في هذا المثال $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 3$ و لكنهما متتاليتان غير متجاورتان .

التمرين – 16

(u_n) و (v_n) **متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :**

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

الحـل – 16

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

حسب العلاقة السابقة $= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$$= \frac{n+2n(2n+1)-2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+4n^2+2n-4n^2-6n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

و لدينا أيضا $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$$

$$= 0$$

خلاصة : (u_n) متتالية متزايدة تماما ، (v_n) متتالية متناقصة تماما ، $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن : حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

<u>التمرين ـــ 17</u>

(u_n) متتالية معرفة على IN^* بـــ $u_n = \frac{\ln n}{n}$ حيث $\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري

برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة 3

<u>الحــل ـــ 17</u>

نعرف الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

لندرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x لدينا $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ من اشارة $1 - \ln x$ كمايلي :

x	0		e	3 $+\infty$
$1 - \ln x$		$+$	0	$-$

إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0 ; e[$ و متناقصة تماما على المجال $]e ; +\infty[$

بماأن $f(n) = u_n$ من أجل $n \in IN^*$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ابتداء من الحد u_3 لأن $e < 3$ و $e > 2$

التمرين ــ 18

(u_n) متتالية معرفة على N بــ $u_n = \frac{5^n}{n!}$

أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها

الحــل ــ 18

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{5^n}{n!}$$

$$= \frac{5 \times 5^n}{(n+1) \times n!} - \frac{5^n}{n!}$$

$$= \frac{5^n}{n!}\left(\frac{5}{n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{5^n}{n!}\left(\frac{5-n-1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{5^n}{n!}\left(\frac{4-n}{n+1}\right)$$

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{5^n}{n!(n+1)} > 0$

إذن : اشارة $u_{n+1} - u_n$ هي اشارة $4 - n$ كمايلي

$4 - n > 0 \Rightarrow 4 > n$

$4 - n < 0 \Rightarrow 4 < n$

$4 - n = 0 \Rightarrow 4 = n$

إذن : ابتداء من u_5 فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما

حذار! ابتداء من الحد u_4 فان $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (لأن $u_5 = u_4$) أي المتتالية متناقصة

التمرين ــ 19

أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة على IN بــ $u_n = \frac{n!}{7^n}$ متزايدة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها

الحــل ــ 19

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)!}{7^{n+1}} - \frac{n!}{7^n}$$

$$= \frac{(n+1) \times n!}{7 \times 7^n} - \frac{n!}{7^n}$$

$$= \frac{n!}{7^n}\left(\frac{n+1}{7} - 1\right)$$

$$= \frac{n!}{7^n}\left(\frac{n+1-7}{7}\right)$$

$$= \frac{n!}{7^n}\left(\frac{n-6}{7}\right)$$

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{n!}{7^n} \times \frac{1}{7} > 0$

إذن : اشارة $u_{n+1} - u_n$ هي اشارة $n - 6$

$n - 6 > 0 \Rightarrow n > 6$

$n - 6 < 0 \Rightarrow n < 6$

$n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6$

إذن : ابتداء من الحد u_7 فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن $u_{n+1} - u_n > 0$

حذار! ابتداء من الحد u_6 فإن المتتالية (u_n) متزايدة لأن $u_7 = u_6$ أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$

التمرين ــ 20

(u_n) متتالية معرفة على IN بــ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $4\,u_{n+1} - 2\,u_n = 9$

و (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بــ $v_n = 2\,u_n - 9$

1 ــ أحسب الحدود u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 ؛ v_0 ؛ v_1 ؛ v_2 ؛ v_3

2 ـ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب أساسها و حدها العام v_n بدلالة n
3 ـ استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n

الحـل ـ 20

1 ـ لدينا : $4\,u_{n+1} - 2\,u_n = 9$ اذن : $4\,u_{n+1} = 2\,u_n + 9$ أي : $u_{n+1} = \frac{1}{4}(2\,u_n + 9)$

منه :
$$u_1 = \frac{1}{4}(2\,u_0 + 9) = \frac{1}{4}(4 + 9) = \frac{13}{4}$$
$$u_2 = \frac{1}{4}(2\,u_1 + 9) = \frac{1}{4}\left(\frac{13}{2} + 9\right) = \frac{13 + 18}{8} = \frac{31}{8}$$
$$u_3 = \frac{1}{4}(2\,u_2 + 9) = \frac{1}{4}\left(\frac{31}{4} + 9\right) = \frac{31 + 36}{16} = \frac{67}{16}$$

لدينا $v_n = 2\,u_n - 9$ إذن :
$$v_0 = 2\,u_0 - 9 = 4 - 9 = -5$$
$$v_1 = 2\,u_1 - 9 = \frac{13}{2} - 9 = \frac{13 - 18}{2} = \frac{-5}{2}$$
$$v_2 = 2\,u_2 - 9 = \frac{31}{4} - 9 = \frac{31 - 36}{4} = \frac{-5}{4}$$
$$v_3 = 2\,u_3 - 9 = \frac{67}{8} - 9 = \frac{67 - 72}{8} = \frac{-5}{8}$$

2 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن :
$$v_{n+1} = 2\,u_{n+1} - 9$$
$$= 2\left[\frac{1}{4}(2\,u_n + 9)\right] - 9$$
$$= \frac{1}{2}(2\,u_n + 9) - 9$$
$$= u_n + \frac{9}{2} - 9$$
$$= u_n - \frac{9}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(2\,u_n - 9)$$
$$= \frac{1}{2}\,v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 1/2 و حدها الأول $v_0 = -5$

منه : $v_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3 ـ لدينا $v_n = 2\,u_n - 9$ أي : $2\,u_n = v_n + 9$ أي : $u_n = \frac{1}{2}v_n + \frac{9}{2}$

منه : $u_n = \frac{1}{2}\left[-5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{9}{2}$ أي : $u_n = \frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ و هي عبارة u_n المطلوبة

لنبحث الأن عن المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$

لدينا :
$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] + ... + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$= \frac{9}{2}(n+1) - 5\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$= \frac{9}{2}(n+1) - 5 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$
$$= \frac{9}{2}(n+1) + 5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$ و هو المطلوب

التمرين ـ 21

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 14$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4\,u_n + 3$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n + 1$

1 ـ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول و عبارة حدها العام

2 ـ استنتج عبارة u_n بدلالة n

3 ـ أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$

الحـل ـ 21

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= (4u_n + 3) + 1 \\ &= 4u_n + 4 \\ &= 4(u_n + 1) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 و حدها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 15$

منه : $v_n = 15 \times (4)^n$

2 ـ لدينا $v_n = u_n + 1$ إذن : $u_n = v_n - 1$ أي : $u_n = 15(4)^n - 1$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2 \\ &= (v_0 - 1)^2 + (v_1 - 1)^2 + ...(v_n - 1)^2 \\ &= (v_0^2 - 2v_0 + 1) + (v_1^2 - 2v_1 + 1) + ... + (v_n^2 - 2v_n + 1) \\ &= (v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2) - 2(v_0 + v_1 + ... + v_n) + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{(n+1)\ \text{مرة}} \end{aligned}$$

لاحظ أن : $v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0\left(\dfrac{(4)^{n+1} - 1}{4 - 1}\right) = 15\left(\dfrac{4^{n+1} - 1}{3}\right) = 5[4^{n+1} - 1]$

نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ $t_n = v_n^2$

إذن : . $t_n = (15 \times 4^n)^2 = 225 \times 16^n$

إذن : (t_n) متتالية هندسية حدها الأول $t_0 = 225$ و أساسها 16

منه :

$$\begin{aligned} v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2 &= t_0 + t_1 + ... + t_n = t_0 \times \left(\frac{16^{n+1} - 1}{16 - 1}\right) \\ &= 225 \times \left(\frac{16^{n+1} - 1}{15}\right) = 15(16^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

نتيجة :

$$\begin{aligned} S_n &= 15 \times (16^{n+1} - 1) - 2 \times 5 \times (4^{n+1} - 1) + n + 1 \\ &= 15 \times 16^{n+1} - 15 - 10 \times 4^{n+1} + 10 + n + 1 \\ &= 15 \times 16^{n+1} - 10 \times 4^{n+1} + n - 4 \end{aligned}$$

التمرين ـ 22

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول $u_0 = 2/9$

أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + ... + u_{10}$

الحـل ـ 22

المتتالية هندسية إذن : $S = u_3 \times \left(\dfrac{3^{10-3+1} - 1}{3 - 1}\right)$

لنحسب u_3 :

لدينا $u_n = u_0 \times 3^n$ إذن : $u_3 = \dfrac{2}{9} \times 3^3 = 6$

منه : $S = 6 \times \left(\dfrac{3^8 - 1}{2}\right) = 3(3^8 - 1) = 3^9 - 3$

التمرين ـ 23

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

أحسب بدلالة n المجموع : $u_0 + u_1 + ... + u_n$

الحـل ـ 23

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= (2 \times 3^0 + 3 \times 4^0) + (2 \times 3^1 + 3 \times 4^1) + ... + (2 \times 3^n + 3 \times 4^n) \\ &= (2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + ... + 2 \times 3^n) + (3 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + ... + 3 \times 4^n) \\ &= 2(3^0 + 3^1 + ... + 3^n) + 3(4^0 + 4^1 + ... + 4^n) \\ &= 2\left[3^0 \times \left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}\right)\right] + 3\left[4^0 \times \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= (3^{n+1} - 1) + (4^{n+1} - 1)$$
$$= 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$$

التمرين ــ 24

$(u_n)_{n>0}$ متتالية حدها الأول $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} = 2\,u_n + 3$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (v_n) بــ $v_n = u_n + 3$

1 ــ أثبت أن v_n متتالية هندسية يطلب حدها العام

2 ــ أحسب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ بدلالة n

3 ــ أثبت أن العدد $u_1 + u_2 + ... + u_n + 3n$.مضاعف العدد 4 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

الحــل ــ 24

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3$$
$$= 2\,u_n + 3 + 3$$
$$= 2\,u_n + 6$$
$$= 2(u_n + 3)$$
$$= 2\,v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_1 = u_1 + 3 = 4$

منه $v_n = 4 \times 2^{n-1}$ أي $v_n = 2^{n+1}$ و هي عبارة الحد العام لــ v_n

2 ــ

$$S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$$
$$= v_1 \times \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right)$$
$$= 4 \times (2^n - 1)$$

3 ــ لدينا : $v_n = u_n + 3$ إذن $u_n = v_n - 3$

منه :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = (v_1 - 3) + (v_2 - 3) + ... + (v_n - 3)$$
$$= (v_1 + v_2 + ... + v_n) - \underbrace{3 - 3 - ..... - 3}_{\text{n مرة}}$$
$$= S_n - 3\,n$$
$$= 4 \times (2^n - 1) - 3\,n$$

إذن :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + 3\,n = 4 \times (2^n - 1) - 3\,n + 3\,n$$
$$= 4 \times (2^n - 1)$$

منه : العدد $u_1 + u_2 + ... + u_n + 3\,n$ مضاعف 4

التمرين ــ 25

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بــ $\begin{cases} u_0 = 2\ ;\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\,u_n - u_{n-1}\ :\ n > 0 \text{ من أجل} \end{cases}$

1 ــ أوجد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a + b = 4 \\ a\,b = 1 \end{cases}$

2 ــ من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_{n+1} - a\,u_n$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها b

3 ــ من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n = u_{n+1} - b\,u_n$

برهن أن (t_n) متتالية هندسية أساسها a

4 ــ أكتب كل من v_n و t_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحــل ــ 25

1 ــ إذا وجد عددين حقيقيين a و b يحققان $\begin{cases} a + b = 4 \\ a\,b = 1 \end{cases}$ فإن a و b هما حلا المعادلة $x^2 - 4\,x + 1 = 0$ في R .

إذن لإيجادهما يكفي حل المعادلة كمايلي :

$$\Delta = 16 - 4 = 12$$

$$a = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$b = \dfrac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}$

ملاحظة : يمكن أن نأخذ $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2-\sqrt{3}$

إذن نأخذ $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2-\sqrt{3}$

2 ـ لدينا $v_n = u_{n+1} - a\,u_n$ أي : $v_n = u_{n+1} - (2+\sqrt{3})\,u_n$

منه :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - (2+\sqrt{3})\,u_{n+1}$$
$$= (4\,u_{n+1} - u_n) - (2+\sqrt{3})\,u_{n+1}$$
$$= (4-2-\sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= (2-\sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= \left(2-\sqrt{3}\right)\left[u_{n+1} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}\,u_n\right]$$
$$= b\left[u_{n+1} - \frac{1}{b}\,u_n\right]$$
$$= b\,[u_{n+1} - a\,u_n]$$ لأن $a\,b = 1$ إذن $\frac{1}{b} = a$
$$= b\,v_n$$

منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $b = 2-\sqrt{3}$

3 ـ لدينا $t_n = u_{n+1} - b\,u_n$ إذن : $t_n = u_{n+1} - (2-\sqrt{3})\,u_n$

منه :

$$t_{n+1} = u_{n+2} - (2-\sqrt{3})\,u_{n+1}$$
$$= (4\,u_{n+1} - u_n) - (2-\sqrt{3})\,u_{n+1}$$
$$= (4-2+\sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= (2+\sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= a\,u_{n+1} - u_n$$
$$= a\left(u_{n+1} - \frac{1}{a}\,u_n\right)$$
$$= a(u_{n+1} - b\,u_n)$$ لأن $a\,b = 1$ إذن $\frac{1}{a} = b$
$$= a\,t_n$$

منه : (t_n) متتالية هندسية أساسها $a = 2+\sqrt{3}$

4 ـ لدينا $v_0 = u_1 - a\,u_0$ إذن : $v_0 = 4 - (2+\sqrt{3})\times 2 = -2\sqrt{3}$

منه : $v_n = -2\sqrt{3}\times(2-\sqrt{3})^n$

و لدينا $t_0 = u_1 - b\,u_0$ إذن : $t_0 = 4 - (2-\sqrt{3})\times 2 = 2\sqrt{3}$

منه : $t_n = 2\sqrt{3}\times(2+\sqrt{3})^n$

و لدينا : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - a\,u_n \\ t_n = u_{n+1} - b\,u_n \end{cases}$ إذن : $t_n - v_n = -b\,u_n - (-a\,u_n)$

أي : $t_n - v_n = (a-b)\,u_n$

أي : $u_n = \dfrac{t_n - v_n}{a-b}$

منه : $u_n = \dfrac{2\sqrt{3}\times(2+\sqrt{3})^n + 2\sqrt{3}\times(2-\sqrt{3})^n}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}$

أي : $u_n = \dfrac{2\sqrt{3}\times[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]}{2\sqrt{3}}$

أي : $u_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$

التمرين ــ 26

c ; b ; a أعداد حقيقية غير معدومة

1 ــ بين أن إذا كانت a ; b ; c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c)$$

2 ــ أوجد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 و مجموع مربعاتها هو 3276

الحـل ــ 26

1 ــ لدينا :
$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc + ac - bc + c^2$$
$$= a^2 + 2ac - b^2 + c^2$$

إذا كانت a ; b ; c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن حسب الوسط الهندسي لدينا : $ac = b^2$

منه :
$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + 2b^2 - b^2 + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2$$ و هو المطلوب

2 ــ لتكن a ; b ; c بهذا الترتيب هذه الأعداد المطلوبة

إذن : $\begin{cases} a+b+c = 78 \\ a^2+b^2+c^2 = 3276 \end{cases}$

لكن حسب السؤال (1) فإن : $a^2 + b^2 + c^2 = (a ; b + c)(a - b + c)$

أي : $3276 = 78(a - b + c)$

أي : $a - b + c = 3276/78$

أي : $a - b + c = 42$

لدينا إذن الجملة $\begin{cases} a+b+c = 78 \text{ ......(1)} \\ a-b+c = 42 \text{ ......(2)} \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $2b = 36$ أي : $b = 18$

ليكن k أساس هذه المتتالية الهندسية حيث $k \in IR^*$

لدينا $c = bk = 18k$ و $a = b/k = 18/k$

إذن المساواة (1) تصبح : $\frac{18}{k} + 18 + 18k = 78$ نضرب الطرفين في k :

أي : $18 + 18k + 18k^2 = 78k$

أي : $18k^2 - 60k + 18 = 0$

أي : $3k^2 - 10k + 3 = 0$ و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول k

$$\Delta = 100 - 36 = 64$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ k_2 = \frac{10+8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

لنختار مثلا $k = 3$

إذن : $c = 18 \times 3 = 54$ و $a = 18/3 = 6$

تحقيق : $\begin{cases} a+b+c = 6+18+54 = 78 \\ a-b+c = 6-18+54 = 42 \end{cases}$

لاحظ أن من أجل $k = 1/3$ نحصل على $a = 54$ و $b = 18$ و $c = 6$

خلاصة : الأعداد المطلوبة هي : $(a ; b ; c) = (6 ; 18 ; 54)$ أو $(a ; b ; c) = (54 ; 18 ; 6)$

التمرين ــ27

(α_n) متتالية هندسية منتهية كل حدودها موجبة حيث حدها الأول $\alpha_1 = 3$ و $\alpha_3 + \alpha_5 = 15/16$

1 ــ عين أساس المتتالية (α_n) ثم حدها العام

2 ــ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_n$

من أجل كل عدد طبيعي، غير معدوم n نضع $\beta_n = \ln(\alpha_n)$ حيث ln هو اللوغاريتم النيبيري

3 ــ برهن أن (β_n) متتالية حسابية يطلب أساسها و حدها العام β_n

4 ــ أحسب بدلالة n المجموع $t_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots \beta_n$

الحـل ــ 27

1 ــ ليكن k أساس المتتالية (α_n) حيث $0 < k < 1$ (لأن حدودها موجبة و المتتالية منتهية)

لدينا : $\alpha_3 = \alpha_1 k^{3-1}$ أي : $\alpha_3 = 3 k^2$

و $\alpha_5 = \alpha_1 k^{5-1}$ أي : $\alpha_5 = 3 k^4$

إذن : $\alpha_3 + \alpha_5 = 15/16$ تكافئ $3 k^2 + 3 k^4 = 15/16$

تكافئ $k^2 + k^4 = 5/16$

تكافئ $16 k^4 + 16 k^2 - 5 = 0$ وهي معادلة مضاعفة التربيع

نضع $t = k^2$ حيث $t \geq 0$

نحل المعادلة $16 t^2 + 16 t - 5 = 0$ كمايلي : $\Delta = 16^2 + 20 \times 16 = 16(16 + 20) = 16 \times 36 = (4 \times 6)^2$

إذن : $\begin{cases} t_1 = \dfrac{-16 + 24}{32} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4} \\ t_2 = \dfrac{-16 - 24}{32} = \dfrac{-40}{32} \end{cases}$ مرفوض

منه : $k^2 = 1/4$ أي $k = 1/2$ لأن $k > 0$

نتيجة : (α_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ و حدها الأول 3 إذن $\alpha_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

2 – $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

$$= \alpha_1 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$= 3 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 6 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

3 – لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$\beta_{n+1} = \ln(\alpha_{n+1})$$
$$= \ln\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$
$$= \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \ln 3 + n \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

أي : $\beta_n = \ln 3 + (n - 1) \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

منه : (β_n) متتالية حسابية حدها الأول $\beta_1 = \ln 3$ و أساسها $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

4 – $t_n = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$

$$= \frac{n}{2} \times (\beta_1 + \beta_n)$$
$$= \frac{n}{2}\left[\ln 3 + \ln 3 + (n - 1) \ln \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{n}{2}\left[2 \ln 3 - (n - 1)\ln 2\right]$$
$$= n \ln 3 - \frac{n(n - 1)}{2} \ln 2$$

<u>**التمرين –28**</u>

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $A_n = \underbrace{111......1}_{n \text{ مرة}}$

أحسب بدلالة n العدد $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$

<u>**الحـل – 28**</u>

لاحظ أن العدد A_n هو حد عام لمتتالية عددية معرفة على IN^* كما يلي :

$A_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $A_{n+1} = A_n + 10^n$

بهذه الطريقة لدينا الكتابات التالية :

$$\begin{aligned}
&A_1 = 1\\
&A_2 = A_1 + 10\\
&A_3 = A_2 + 10^2\\
\oplus\ &A_4 = A_3 + 10^3\\
&\vdots\\
&A_n = A_{n-1} + 10^{n-1}
\end{aligned}$$

بجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على :

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} + A_n = A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} + 1 + 10 + 10^2 + \ldots.. + 10^{n-1}$$

أي :

$$A_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots.. + 10^{n-1}$$

لاحظ أن $1\ ;\ 10\ ;\ 10^2\ ;\ \ldots.\ 10^{n-1}$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها 10

إذن :

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots\ldots + 10^{n-1} = 1 \times \left[\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right] = \frac{10^n - 1}{9}$$

منه :

$$A_n = \frac{10^n - 1}{9} \quad \text{أي :} \quad A_n = \frac{1}{9} \times 10^n - \frac{1}{9}$$

لنكتب هذه الحدود كمايلي :

$$\begin{aligned}
&A_1 = \frac{1}{9} \times 10^1 - \frac{1}{9}\\
&A_2 = \frac{1}{9} \times 10^2 - \frac{1}{9}\\
\oplus\ &A_3 = \frac{1}{9} \times 10^3 - \frac{1}{9}\\
&\vdots\\
&A_n = \frac{1}{9} \times 10^n - \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

بجمع هذه المساواة نحصل على :

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n &= \frac{1}{9}\left[10^1 + 10^2 + \ldots.. + 10^n\right] - \frac{1}{9} \times n\\
&= \frac{1}{9}\left[10 \times \left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right)\right] - \frac{n}{9}\\
&= \frac{10}{81}(10^n - 1) - \frac{n}{9}
\end{aligned}$$

و هي عبارة المجموع S_n

مثلا : $A_1 = 1\ ;\ A_2 = 11\ ;\ A_3 = 111$ إذن : $A_1 + A_2 + A_3 = 123$

و بتطبيق العلاقة الناتجة فإن :

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= \frac{10}{81}(10^3 - 1) - \frac{3}{9}\\
&= \frac{10 \times 999}{9 \times 9} - \frac{3}{9}\\
&= \frac{10 \times 111}{9} - \frac{3}{9}\\
&= \frac{1110 - 3}{9}\\
&= \frac{1107}{9}\\
&= 123
\end{aligned}$$

التمرين ـ 29

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = -2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$

حيث α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha \neq 0$

1 ـ أوجد الأعداد α و β و التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة .

نفرض أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n + \lambda$

حيث λ عدد حقيقي غير معدوم .

2 ـ عين λ بدلالة α و β حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3 ـ نضع $\alpha = 3$ ؛ $\beta = 2$ ؛ $\lambda = 1$

أحسب المجموعين S_n و t_n بدلالة n حيث $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

الحـل ـ 29

1 ـ تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا وفقط إذا تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} = u_n$

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\alpha u_n + \beta = u_n$

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $(\alpha - 1) u_n + \beta = 0$

بالمطابقة نحصل على $\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ أي : $\alpha = 1$ و $\beta = 0$

2 ـ لتكن (u_n) متتالية ليست ثابتة أي : $(\alpha ; \beta) \neq (1 ; 0)$

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda$ أي : $v_{n+1} = \alpha u_n + \beta + \lambda$

أي : $v_{n+1} = \alpha\left(u_n + \frac{\beta + \lambda}{\alpha}\right)$ حيث $\alpha \neq 0$

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$u_n + \frac{\beta + \lambda}{\alpha} = u_n + \lambda$ أي : $\lambda = \frac{\beta + \lambda}{\alpha}$

أي : $\alpha \lambda = \beta + \lambda$

أي : $\lambda(\alpha - 1) = \beta$

أي : $\lambda = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ حيث $\alpha \neq 1$

و عليه (v_n) متتالية هندسية أساسها α و حدها الأول $v_0 = u_0 + \lambda = -2 + \frac{\beta}{\alpha - 1}$

3 ـ بوضع $\alpha = 3$ ؛ $\beta = 2$ ؛ $\lambda = 1$

لاحظ أن : $1 = \frac{2}{3 - 1} = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ إذن : $\frac{\beta}{\alpha - 1} = \lambda$

منه : الأعداد α ؛ β و λ تحقق شروط السؤال (2) أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\alpha = 3$ و حدها الأول

$v_0 = -2 + \lambda = -1$

إذن : $(v_n) = -1(3)^n$

منه :

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$$

$$= v_0 \times \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}\right)$$

$$= -1\left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 3^{n+1}\right]$$

و لدينا : $v_n = u_n + \lambda$ أي $v_n = u_n + 1$ منه : $u_n = v_n - 1$

إذن : $t_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

$$= (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + ... + (v_n - 1)$$

$$= (v_0 + v_1 + ... + v_n) - 1 \times (n + 1)$$

$$= S_n - n - 1$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 3^{n+1}] - n - 1$$

مثال : $u_0 = -2$ ؛ $u_1 = \alpha u_0 + \beta = 3(-2) + 2 = -4$: إذن $u_0 + u_1 = -2 - 4 = -6$

بتطبيق العلاقة الناتجة : $u_0 + u_1 = \frac{1}{2}[1 - 3^2] - 1 - 1 = -4 - 2 = -6$

التمرين ــ 30

في كل حالة من الحالات التالية أحسب نهاية المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام .

ــ 1 $u_n = e^{1-n}$ **ــ 6** $u_n = \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1}$

ــ 2 $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2n + 3}\right)$ **ــ 7** $u_n = \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right)$ من أجل $n > 1$

ــ 3 $u_n = (n + 2)e^{-n}$ **ــ 8** $u_n = \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right)$

ــ 4 $u_n = \ln(3 + e^{2-n})$ **ــ 9** $u_n = \frac{2^n}{5^n} - 1$

ــ 5 $u_n = \frac{e^n - 6}{2e^n + 1}$

الحـل ــ 30

ــ 1

$$\lim_{n \to +\infty} e^{1-n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e}{e^n} = 0$$ لأن $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

ــ 2

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n + 3}\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ln(1)$$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$

$$= 0$$

ــ 3

$$\lim_{n \to +\infty} (n + 2)e^{-n} = \lim_{n \to +\infty} (n e^{-n} + 2e^{-n})$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{e^n} + \frac{2}{e^n}\right)$$

$$= 0$$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

ــ 4

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(3 + e^{2-n}) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(3 + \frac{e^2}{e^n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ln(3)$$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

$$= \ln(3)$$

ــ 5

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^n\left(1 - \frac{6}{e^n}\right)}{e^n\left(2 + \frac{1}{e^n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - 0}{2 + 0}\right)$$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

$$= 1/2$$

ــ 6

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^n} - 1}{\frac{2}{e^n} + 1}$$

$$= -1/1$$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

$$= -1$$

7 –
$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n\left(1 - \frac{3}{e^n}\right)}{e^n\left(1 + \frac{1}{e^n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1 - 0}{1 + 0}\right) \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

$$= \ln 1$$
$$= 0$$

8 –
$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n\left(1 + \frac{2}{e^n}\right)}{e^n\left(e^n + \frac{1}{e^n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1 + 0}{e^n + 0}\right) \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{e^n}\right)$$

$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

9 –
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{5^n} - 1 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1$$

$$= -1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad \left(-1 < \frac{2}{5} < 1\right)$$

التمرين – 31

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على IN بـ : $u_0 = 2$ ؛ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1}$

و $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ (حيث من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \neq 0$)

1 – برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2 – برهن أن (v_n) متتالية حسابية ثم أكتب عبارة حدها العام .

3 – إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل – 31

1 – لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 0$

لنبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$ لدينا $u_1 = \dfrac{u_0}{3u_0 + 1} = \dfrac{2}{6 + 1} = \dfrac{2}{7}$ و $2/7 > 0$

إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$ و $n = 1$ (لأن $u_0 = 2$ و $2 > 0$)

لنفرض أن $u_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا : $u_n > 0$ إذن : $3u_n > 0$ إذن : $3u_n + 1 > 1$ و خاصة $3u_n + 1 > 0$

منه : $\dfrac{1}{3u_n + 1} > 0$ و بضرب طرفي هذه المتباينة في u_n حيث $u_n > 0$ نحصل على $\dfrac{u_n}{3u_n + 1} > 0$

أي $u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2 – لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{u_n}{3u_n + 1}}$$

$$= \frac{3u_n + 1}{u_n}$$

$$= 3 + \frac{1}{u_n}$$

$$= 3 + v_n$$

إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

منه : $v_n = \frac{1}{2} + 3n$

3 ـ لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n}$ إذن : $u_n = \frac{1}{v_n}$ أي $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n}$

منه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n} = 0$

التمرين ـ 32

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$ و $v_n = u_n + 3$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$

1 ـ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حدها العام .

2 ـ عين نهاية كل من المتتاليات (u_n) ؛ (S_n) و (t_n)

الحـل ـ 32

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3$$

$$= \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$

$$= \frac{1}{3}u_n + 1$$

$$= \frac{1}{3}(u_n + 3)$$

$$= \frac{1}{3}v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 1/3 و حدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = 5$

منه : $v_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2 ـ لدينا : $v_n = u_n + 3$ إذن : $u_n = v_n - 3$ أي $u_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

منه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = -3$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$

$$= v_0 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right)$$

$$= 5 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{-2/3}\right)$$

$$= \frac{-15}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} -\frac{15}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] = \frac{15}{2}$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

و لدينا أيضا :

$$t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$
$$= (v_0 - 3) + (v_1 - 3) + ... + (v_n - 3)$$
$$= (v_0 + v_1 + ... + v_n) - 3(n+1)$$
$$= S_n - 3(n+1)$$
$$= S_n - 3n - 3$$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n - 3n - 3 = -\infty$ لأن $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} -3n = -\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 15/2 \end{array} \right.$

التمرين ـــ 33

عين نهايات كل من المتتاليات (u_n) ؛ (v_n) ؛ (w_n) ؛ (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كمايلي :

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+1} \quad ; \quad v_n = \frac{u_n}{n} \quad ; \quad w_n = u_n - n \quad ; \quad t_n = \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$$

الحـل ـــ 33

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} u_n - n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n+1} - n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1-n^2-n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{n} = -1$$

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{u_n}{n} - 1}{u_n - n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n - n}{n} \times \frac{1}{u_n - n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2+1}{n+1} - n}{n} \times \frac{1}{\frac{n^2+1}{n+1} - n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2+1-n^2-n}{n+1}}{n} \times \frac{1}{\frac{n^2+1-n^2-2n-1}{n+1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1-n}{n(n+1)} \times \frac{n+1}{-2n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1-n}{-2n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{-2n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n}$$

$$= 0$$

ملاحظة : يمكن إيجاد نهاية t_n بإستعمال نهاية w_n و v_n كمايلي :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - 1 = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -1$ إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - 1 = -2$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n - 1}{w_n - 1} = \dfrac{0}{-2} = 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$

التمرين ـــ 34

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـــ $u_n = \dfrac{1}{n!}$

حيث $\left.\begin{array}{l} 0! = 1 \\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n \end{array}\right\}$ **من أجل $n > 0$**

1 ـــ أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) .

2 ـــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$

2 ـــ إستنتج نهاية المتتالية u_n .

الحــل ـــ 34

1 ـــ

$$u_1 = \frac{1}{1!} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

$$u_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}$$

$$u_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{120}$$

2 ـــ نستعمل الإستدلال بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$ الخاصية محققة لأن $u_1 = 1$ و $0 < 1 \leq 1/1$

نفرض أن $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$ من أجل $n > 1$

هل $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ ؟

لدينا : $\dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ إذن : $u_{n+1} > 0$ .... (1)

لنحسب الفرق $u_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$ كمايلي :

$$u_{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)n!} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n!} - 1\right]$$

لكن $n! \geq 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

إذن : $\dfrac{1}{n!} \leq 1$ منه : $\dfrac{1}{n!} - 1 \leq 0$

أي : $\dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{1}{n!} - 1\right] \leq 0$

أي : $u_{n+1} - \dfrac{1}{n+1} \leq 0$

أي : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ .... (2)

من المتباينتين (1) و (2) فإن $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $0 < u_n \leq 1/n$

3 ـ لدينا : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ إذن : $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$

لكن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

إذن : $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

التمرين ـ 35

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}}$

1 ـ تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

2 ـ إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الحـل ـ 35

1 ـ نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

إذن : $-1 \leq \cos(3n - \pi) \leq 1$ .... (1)

نضرب المتباينة (1) في العدد الموجب $\frac{1}{\sqrt{n}}$ فنحصل على :

$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ أي $\frac{-1}{\sqrt{n}} < u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ و هو المطلوب

2 ـ لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0$

إذن : $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

التمرين ـ 36

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = n + 1 - \cos\frac{n\pi}{5}$

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $n \leq u_n \leq n + 2$ ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحـل ـ 36

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

أي : $-1 \leq -\cos x \leq 1$

منه : $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$

و خاصة لدينا : $0 \leq 1 - \cos\frac{n\pi}{5} \leq 2$

نضيف n إلى الأطراف : $n \leq n + 1 - \cos\frac{n\pi}{5} \leq n + 2$

أي : $n \leq u_n \leq n + 2$ و هو المطلوب

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ و $u_n \geq n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

التمرين ـ 37

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

برر أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 30 يكون $u_n \geq 2^n$ ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحـل ـ 37

لدينا : $n \geq 30$ إذن : $\frac{n}{10} \geq \frac{30}{10}$

إذن: $\frac{n}{10} \geq 3$

منه : $\frac{n}{10} - 1 \geq 3 - 1$

أي : $\frac{n}{10} - 1 \geq 2$

منه : $\left(\frac{n}{10} - 1\right)^n \geq 2^n$

أي : $u_n \geq 2^n$ و هو المطلوب

بما أن $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ و $u_n \geq 2^n$ فإن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

التمرين ــ 38

1 ــ برهن أن إبتداء من رتبة معينة يطلب تعيينها يكون $2^n \leq (n-1)!$

2 ــ بين أن المتتالية (u_n) ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ متقاربة .

الحـل ــ 38

ــ 1

n	2^n	$(n-1)!$
1	2	1
2	4	1
3	8	2
4	16	6
5	32	24
6 ⟵ $n = 6$	64	120
7	128	720

لاحظ أن إبتداء من $n = 6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$

لنبرهن هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 6$: الخاصية محققة حسب الجدول السابق

نفرض أن $2^n \leq (n-1)!$ من أجل $n > 6$

هل $2^{n+1} \leq (n+1-1)!$ أي هل $2^{n+1} \leq n!$

لدينا : $2^n \leq (n-1)!$ ....(1) حسب فرضية التراجع .

و $2 \leq n$ ...... (2) لأن البرهان من أجل $n > 6$

نضرب المتباينتين (1) و (2) طرف لطرف نحصل على : $2 \times 2^n \leq n(n-1)!$

أي : $2^{n+1} \leq n!$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$

2 ــ لتكن المتتالية (u_n) معرفة بــ $u_n = \frac{2^n}{n!}$

لدينا من أجل $n \geq 6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$ إذن : $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!}$

أي : $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n \times (n-1)!}$

أي : $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{1}{n}$

أي : $u_n \leq \frac{1}{n}$ من أجل $n \geq 6$

لما يؤول n إلى $+\infty$ فإن $n >>> 6$ إذن : $u_n \leq 1/n$

لكن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ لأن $u_n > 0$

منه : المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

التمرين ــ 39

(u_n) متتالية معرفة بــ $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

2 ـ برر أن المتتالية (u_n) متقاربة و أن نهايتها ℓ أكبر من أو يساوي 2

3 ـ بين أن النهاية ℓ تحقق $\ell = \sqrt{2+\ell}$ ثم إستنتج قيمة ℓ

الحـل ـ 39

1 ـ الإستدلال بالتراجع :

من أجل $n = 1$ لدينا : $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{7}$

بما أن $2 \le \sqrt{7} \le 5$ فإن $2 \le u_1 \le u_0$ أي الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $2 \le u_{n+1} \le u_n$ من أجل $n > 1$

هل $2 \le u_{n+1+1} \le u_{n+1}$

أي هل $2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $2 \le u_{n+1} \le u_n$

منه : $4 \le 2+u_{n+1} \le 2+u_n$

منه : $\sqrt{4} \le \sqrt{2+u_{n+1}} \le \sqrt{2+u_n}$

أي : $2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 \le u_{n+1} \le u_n$

2 ـ حسب السؤال (1) لدينا : $u_n \ge 2$ إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بـ 2

و لدينا أيضا : $u_{n+1} \le u_n$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

نتيجة : (u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة إذن : هي متتالية متقاربة .

و لتكن ℓ نهايتها إذن : $\ell \ge 2$ لأن 2 هو الحد الأسفل للمتتالية .

3 ـ لدينا : لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = u_n$ أي $\sqrt{2+u_n} = u_n$

و في هذه الحالة u_n يؤول إلى ℓ أي : $\sqrt{2+\ell} = \ell$

إذن : يكفي حل المعادلة $\sqrt{2+\ell} = \ell$ كمايلي :

المعادلة تكافئ $2 + \ell = \ell^2$

أي : $\ell^2 - \ell - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$$\begin{cases} \ell_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \ell_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \quad \text{مرفوض} \end{cases}$$

(نبحث عن ℓ حيث $\ell \ge 2$)

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

التمرين ـ 40

(u_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{n}$

1 ـ أدرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة على IR^* بـ $f(x) = \ln(x+1) - x$

2 ـ استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن $\ln(k+1) - \ln(k) \le 1/k$

ثم استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\ln(n+1) \le u_n$

3 ـ ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحـل ـ 40

1 ـ تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

$f(x) = \ln(x+1) - x$

$f(0) = \ln(1) - 0 = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left(-\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to +\infty} -x$$

$$= -\infty$$

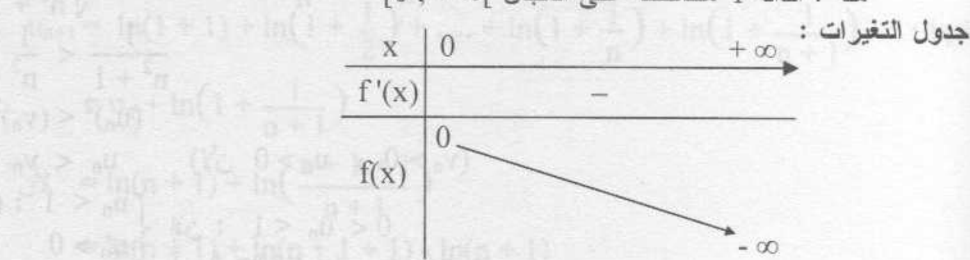
f دالة قابلة للإشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

لاحظ أن : $\frac{x}{x+1} \geq 0$.لأن $x \geq 0$ و $x+1 > 0$ إذن : $\frac{-x}{x+1} \leq 0$

منه : الدالة f متناقصة على المجال $[0 ; +\infty[$

جدول التغيرات :



x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$

2 ـ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$: $f(x) \leq 0$

أي : $\ln(x+1) - x \leq 0$

أي : $\ln(x+1) \leq x$ ...... (α)

ليكن $k \in IN^*$ إذن : $1/k > 0$ أي $1/k \in]0 ; +\infty[$

منه : $\ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) \leq \frac{1}{k}$ حسب الخاصية (α)

أي : $\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

أي : $\ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ و هو المطلوب

لدينا من أجل كل $k \in IN^*$ فإن $\ln(k+1) - \ln k \leq 1/k$

لنكتب هذه العلاقة من أجل $k = 1$; $k = 2$; $k = 3$; .... $k = n$ كمايلي :

$$\ln(2) - \ln(1) \leq 1$$
$$\ln(3) - \ln(2) \leq 1/2$$
$$\oplus \quad \ln(4) - \ln(3) \leq 1/3$$
$$\vdots$$
$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq 1/n$$

بجمع هذه المتباينات طرف لـ طرف : ———————— نحصل على :

$$-\ln(1) + \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

أي : $\ln(n+1) \leq u_n$ و هو المطلوب .

3 ـ لدينا $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ و $u_n \geq \ln(n+1)$ إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

التمرين ـ 41

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN^* بـ $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n = \frac{1}{n}$

1 ـ أثبت أن 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2 ـ أثبت أن من أجل كل n من IN^* فإن $u_n < v_n$

3 ـ هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) محدودتين

الحـل ـ 41

1 ـ لدينا : $n > 0$ إذن : $n^2 > 0$

إذن : $n^2+1>1$

إذن : $\sqrt{n^2+1}>1$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<1$

أي : $u_n<1$ أي العدد 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

2 ــ لاحظ أن من أجل كل n من *IN فإن $\frac{1}{n}>0$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}>0$

أي $u_n>0$ و $v_n>0$ و عليه يكفي مقارنة $(u_n)^2$ و $(v_n)^2$ كمايلي :

$$(u_n)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^2=\frac{1}{n^2+1} \quad \text{و} \quad (v_n)^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}$$

لدينا : $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$

إذن : $(u_n)^2<(v_n)^2$

منه : $u_n<v_n$ (لأن $u_n>0$ و $v_n>0$)

لدينا حسب السؤال (1) : $u_n<1$
و من جهة أخرى : $u_n>0$
إذن : $0<u_n<1$
أي المتتالية (u_n) محدودة

و لدينا أيضا : $n\geq 1$

إذن : $1/n\leq 1$

أي : $v_n\leq 1$

منه : $0<v_n\leq 1$ إذن : المتتالية (v_n) محدودة

التمرين ــ 42

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$u_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots\ldots\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

1 ــ بين ان المتتالية (u_n) متزايدة .

2 ــ أعط عبارة مختصرة للحد u_n .

3 ــ هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

الحــل ــ 42

1 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1}-u_n=\left[\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]-\left[\ln(1+1)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

بما أن $\frac{1}{n+1}>0$ فإن $1+\frac{1}{n+1}>1$

إذن $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>\ln 1$

أي : $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$

منه : $u_{n+1}-u_n>0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2 ــ لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln(k+1)-\ln k$$

مثلا : $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{2+1}{2}\right)=\ln 3-\ln 2$

إذن : بتطبيق هذه الخاصية من أجل $k=2$; $k=3$; $k=4$; $k=5$; ...... $k=n$ نحصل على :

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + ...+ \ln(n+1) - \ln n$$
$$= \ln(n+1)$$

أخيرا : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = \ln(n+1)$

ملاحظة : يمكن إثبات هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$ لدينا : $u_n = \ln(1+1) = \ln 2$

و $\ln(n+1) = \ln(1+1) = \ln 2$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$.

نفرض أن $u_n = \ln(n+1)$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} = \ln(n+1+1)$ ؟

لدينا : $u_{n+1} = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$$= u_n + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) \quad \text{لأن} \quad u_n = \ln(1+n)$$
$$= \ln(n+1) + \ln(n+1+1) - \ln(n+1)$$
$$= \ln(n+1+1)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = \ln(n+1)$

3 ــ لدينا : $n \geq 1$ إذن : $n + 1 \geq 2$ منه : $\ln(n+1) \geq \ln 2$ أي $u_n \geq \ln 2$

إذن : المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\ln 2$

لكن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

إذن : المتتالية (u_n) ليست محدودة من الأعلى .

نتيجة : المتتالية (u_n) ليست محدودة .

<u>التمرين ــ 43</u>

(u_n) متتالية معرفة على IN^* بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$

1 ــ هل العدد 3/2 هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

2 ــ برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة و استنتج أنها متقاربة .

3 ــ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

<u>الحل ــ 43</u>

1 ــ لاحظ أن u_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 1/3 و حدها الأول 1

إذن : $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}$ أي : $u_n = \frac{-3}{2} \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$

أي : $u_n = \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

لدينا : $0 \leq 1/3 \leq 1$

إذن : $0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1$

إذن : $-1 \leq -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 0$

إذن : $0 \leq 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1$

إذن : $0 \leq \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \leq \frac{3}{2}$

أي $0 \leq u_n \leq 3/2$

منه : العدد $3/2$ هو حد أعلى للمتتالية (u_n) .

2 ـــ لدينا من أجل كل n من IN^* فإن :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}$$

بما أن $\frac{1}{3^{n+1}} > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

نتيجة : (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى إذن : هي متتالية متقاربة .

3 ـــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

التمرين ـــ 44

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in IR$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = e^{-u_n}$

برهن أن إبتداء من الدليل 2 تكون المتتالية (u_n) محدودة بالعددين 0 و 1

الحـــل ـــ 44

لنبرهن عن الخاصية : من أجل كل n من $IN - \{0 ; 1\}$ فإن $0 \leq u_n \leq 1$

بإستعمال الإستدلال بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 2$ لدينا : $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in IR$

إذن : $u_1 = e^{-\alpha}$

إذن : $u_2 = e^{-u_1} = e^{-e^{-\alpha}}$

لندرس تغيرات الدالة f حيث $f(\alpha) = e^{-\alpha}$ من أجل $\alpha \in IR$ كمايلي :

f معرفة وقابلة للإشتقاق على IR و $f'(\alpha) = -e^{-\alpha}$

إذن : من أجل كل $\alpha \in IR$ فإن $f'(\alpha) < 0$

α	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(\alpha)$		$-$	
$f(\alpha)$	$+\infty$	1	0

من جدول التغيرات نستنتج أن : من أجل كل $\alpha > 0$ فإن $0 \leq f(\alpha) \leq 1$

أي من أجل كل $\alpha > 0$ فإن $0 \leq e^{-\alpha} \leq 1$

إذن : من أجل كل $\alpha \in IR$ فإن $0 \leq e^{-e^{-\alpha}} \leq 1$ (لأن $e^{-\alpha} > 0$)

أي $0 \leq u_2 \leq 1$

منه : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $0 \leq u_n \leq 1$ من أجل $n > 2$

هل $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ؟

لدينا : $0 \leq u_n \leq 1$ إذن : $-1 \leq -u_n \leq 0$

إذن : $e^{-1} \leq e^{-u_n} \leq e^0$

أي $1/e \leq u_{n+1} \leq 1$

لكن $1/e > 0$ إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN - \{0 ; 1\}$ فإن $0 \leq u_n \leq 1$ أي المتتالية (u_n) محصورة بين 0 و 1

التمرين ـــ 45

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـــ : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^n}$

1 ـــ ماهو إتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

2 ـــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

3 ـ أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة .

الحل ـ 45

1 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{4^{n+1}}$$

$\frac{1}{4^{n+1}} > 0$ إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$

منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2 ـ لاحظ أن u_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 1/4 و حدها الأول 1

إذن : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$

$$= 1 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right)$$

$$= \frac{-4}{3} \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$= \frac{-4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$ و هو المطلوب

3 ـ $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

نتيجة : لدينا كل حدود المتتالية (u_n) أكبر أو تساوي 1 و $\lim_{n \to +\infty} u_n = 4/3$ و (u_n) متزايدة

إذن : $1 \le u_n \le 4/3$ أي المتتالية (u_n) محدودة بـ 4/3 و 1 .

التمرين ـ 46

(u_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in IR$ و من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3\,u_n + 5$$

1 ـ برر أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \ge 1$ ماذا تستنتج ؟

2 ـ نفرض أن المتتالية (u_n) متقاربة و نهايتها ℓ . أكتب معادلة من الدرجة الثانية تكون محققة من أجل ℓ .
ثم إستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

الحل ـ 46

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3\,u_n + 5 - u_n$$
$$= u_n^2 - 4\,u_n + 5$$

لندرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = x^2 - 4x + 5$

لدينا : $f'(x) = 2x - 4$ و إشارتها :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x - 4$	$-$	0	$+$

منه : جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

$f(2) = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من IR فإن $f(x) \ge 1$

أي : $x^2 - 4x + 5 \geq 1$

إذن : من أجل كل حد u_n من حدود المتتالية (u_n) فإن $u_n^2 + 4u_n + 5 \geq 1$

أي $u_{n+1} - u_n \geq 1$ و هو المطلوب .

نتيجة : $u_{n+1} - u_n \geq 1$ و خاصة $u_{n+1} - u_n > 0$

أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2 ـ لنفرض أن (u_n) متقاربة حيث $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = \ell$ و $u_n = \ell$

أي : $\ell = \ell^2 - 3\ell + 5$

أي : $\ell^2 - 4\ell + 5 = 0$ و هي المعادلة المطلوبة .

لكن لا يوجد أي عدد حقيقي ℓ يحقق المعادلة $\ell^2 - 4\ell + 5 = 0$

لأن حسب السؤال السابق : $\ell^2 - 4\ell + 5 \geq 1$ من أجل كل $\ell \in IR$

و عليه فإن العدد ℓ غير موجود أي المتتالية (u_n) ليست متقاربة .

و منه : المتتالية (u_n) متباعدة .

التمرين ـ 47

(u_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ و من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = 3u_n - 4$

1 ـ أحسب الحدين u_1 و u_2

2 ـ برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

3 ـ عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب حدها العام ثم الحد العام للمتتالية (u_n) .

4 ـ هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

5 ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{u_n}{4^n}$

برهن أن المتتالية (w_n) متقاربة نحو العدد $17/3$

الحـل ـ 47

1 ـ لدينا : $u_1 = 3u_0 - 4 = 3\left(\frac{11}{4}\right) - 4 = \frac{33-16}{4} = \frac{17}{4}$

$u_2 = 3u_1 - 4 = 3\left(\frac{17}{4}\right) - 4 = \frac{51-16}{4} = \frac{35}{4}$

2 ـ لنبرهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- من أجل $n = 1$ و $n = 2$ لاحظ أن $u_2 > u_1$ إذن : المتتالية متزايدة تماما .

نفرض أن $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل $n > 2$ (أي (u_n) متزايدة تماما من أجل $n > 2$)

هل $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا : $u_{n+2} - u_{n+1} = (3u_{n+1} - 4) - (3u_n - 4)$

$= 3u_{n+1} - 4 - 3u_n + 4$

$= 3(u_{n+1} - u_n)$

لكن حسب فرضية التراجع فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن : $3(u_{n+1} - u_n) > 0$

أي : $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 2$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3 ـ من أجل كل $n \in IN$ لدينا : $v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha$

$= 4(3u_n - 4) + \alpha$

$= 12u_n - 16 + \alpha$

$= 3\left(4u_n + \frac{\alpha - 16}{3}\right)$

إذن : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان من أجل كل $n \in IN$:

$4u_n + \frac{\alpha - 16}{3} = 4u_n + \alpha$ أي $\frac{\alpha - 16}{3} = \alpha$

أي : $3\alpha = \alpha - 16$

أي : $2\alpha = -16$

أي : $\alpha = -8$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = 4u_0 - 8 = 4\left(\frac{11}{4}\right) - 8 = 3$

منه : $v_n = 3 \times 3^n$ أي $v_n = 3^{n+1}$

لدينا : $v_n = 4u_n + \alpha$ إذن : $4u_n = v_n - \alpha$ إذن : $u_n = \frac{v_n - \alpha}{4}$

منه : $u_n = \frac{3^{n+1} + 8}{4}$ أي $u_n = 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1}$

4 ــ لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^{n+1} = +\infty$

و عليه فالمتتالية (u_n) ليست محدودة من الأعلى إذن فهي ليست محدودة .

5 ــ لدينا : $u_n = 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1}$

منه :

$$\frac{u_n}{4^n} = \frac{2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1}}{4^n} = \frac{2}{4^n} + \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

إذن :

$$w_n = \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$$

$$= \left[2 \times \frac{1}{4^0} + \left(\frac{3}{4}\right)^1\right] + \left[2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + \dots + \left[2 \times \frac{1}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \left(2 \times \frac{1}{4^0} + 2 \times \frac{1}{4} + \dots + 2 \times \frac{1}{4^n}\right) + \left(\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 2 \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{4}\right) - 1} + \frac{3}{4} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}$$

$$= \frac{-4}{3} \times 2 \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right] - 4 \times \frac{3}{4} \times \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + 3 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

بما أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ لأن $0 < 3/4 < 1$ و $0 < 1/4 < 1$

فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{8}{3} \times (1 - 0) + 3 \times (1 - 0)$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$

أي : المتتالية (w_n) متقاربة نحو العدد $17/3$.

التمرين ــ 48

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN بـــ $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad ، \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = u_n - v_n$

1 ـ برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب حدها العام و نهايتها .

2 ـ عبر عن $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ثم أستنتج إتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3 ـ بين أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية التي نرمز لها بـ ℓ

4 ـ من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n = 3\,u_n + 10\,v_n$

برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم إستنتج قيمة ℓ .

الحل ـ 48

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2\,v_n}{3} - \frac{u_n + 4\,v_n}{5} = \frac{5\,u_n + 10\,v_n - 3\,u_n - 12\,v_n}{15} = \frac{2\,u_n - 2\,v_n}{15} = \frac{2}{15}(u_n - v_n) = \frac{2}{15}\,w_n$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $2/15$ و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$

منه : $w_n = -\left(\frac{2}{15}\right)^n$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$ لأن $0 \leq 2/15 \leq 1$

2 ـ

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2\,v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2\,v_n - 3\,u_n}{3} = \frac{2\,v_n - 2\,u_n}{3} = \frac{-2}{3}(u_n - v_n) = \frac{-2}{3}\,w_n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4\,v_n}{5} - v_n = \frac{u_n + 4\,v_n - 5\,v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{5} = \frac{1}{5}(u_n - v_n) = \frac{1}{5}\,w_n$$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3}\,w_n = \frac{-2}{3} \times \left(-\left(\frac{2}{15}\right)^n\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{15}\right)^n$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

و لدينا: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5}\,w_n = \frac{1}{5} \times \left(-\left(\frac{2}{15}\right)^n\right) = \frac{-1}{5}\left(\frac{2}{15}\right)^n$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه : المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3 ــ من جهة أخرى لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

نتيجة : (u_n) متتالية متزايدة تماما ، (v_n) متتالية متناقصة تماما ، $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

منه : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية و لتكن ℓ

4 ــ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $t_{n+1} = 3\, u_{n+1} + 10\, v_{n+1}$

$$= 3 \times \left(\frac{u_n + 2\, v_n}{3}\right) + 10 \times \left(\frac{u_n + 4\, v_n}{5}\right)$$
$$= u_n + 2\, v_n + 2(u_n + 4\, v_n)$$
$$= 3\, u_n + 10\, v_n$$
$$= t_n$$

إذن : من أجل كل $n \in IN$: $t_{n+1} = t_n$

أي : المتتالية (t_n) ثابتة و كل حدودها تساوي $t_0 = 3\, u_0 + 10\, v_0 = 3 + 20 = 23$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t_0 = 23$

لكن : $t_n = 3\, u_n + 10\, v_n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (3\, u_n + 10\, v_n)$

أي : $23 = \lim\limits_{n \to +\infty} (3\, u_n + 10\, v_n)$

أي : $23 = 3\,\ell + 10\,\ell$ (لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$)

أي : $23 = 13\,\ell$

أي : $\ell = 23/13$

التمرين ــ 49

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN بـ $u_0 = 3$; $v_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1 ــ أحسب u_1 ؛ v_1 ؛ u_2 ؛ v_2

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = v_n - u_n$

2 ــ بين أن المتتالية (w_n) هندسية و عين نهايتها .

3 ــ أدرس إتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم استنتج أنهما متجاورتان .

(t_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2\, v_n)$

4 ــ برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n) .

الحـل ــ 49

1 ــ

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{14 + 15}{4}}{2} = \frac{29}{8}$$

$$v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29 + 30}{8}}{2} = \frac{59}{16}$$

2 ـ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$

$$= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1} + v_n - u_n - v_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} - u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{v_n - u_n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{1}{4} w_n$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $1/4$ و حدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$

منه : $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن $0 \leq 1/4 \leq 1$

3 ـ **إتجاه التغير:**

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{1}{2} w_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n$$

$$= \frac{u_{n+1} + v_n - 2v_n}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1} - v_n}{2}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2}$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2v_n}{4}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

$$= -\frac{1}{4} w_n$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ أي المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

لدينا أيضا : $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

نتيجة : (u_n) متتالية متزايدة تماما
(v_n) متتالية متناقصة تماما
$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

4 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $t_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2 v_{n+1})$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + 2 \times \left(\frac{u_{n+1} + v_n}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}(u_n + v_n + v_n)$$

$$= \frac{1}{3}(u_n + 2 v_n)$$

$$= t_n$$

إذن : المتتالية (t_n) ثابتة و كل حدودها تساوي $t_0 = \frac{1}{3}(u_0 + 2 v_0) = \frac{1}{3}(3 + 8) = \frac{11}{3}$

نتيجة : لدينا المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن هما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نضع $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$

من جهة أخرى (t_n) متتالية ثابتة إذن : $\lim_{n \to +\infty} t_n = t_0 = \frac{11}{3}$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} t_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}(u_n + 2 v_n)$

أي $\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(\ell + 2\ell)$

أي : $\frac{11}{3} = \frac{1}{3} \times 3\ell$

أي $\ell = 11/3$ و هي نهاية كل من المتتاليتان (u_n) و (v_n)

التمرين ــ 50

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بــ $u_0 = -1$ ؛ $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4 v_n}{5}$$

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2 ـ برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .
من أجل كل عدد طبيعي n نضع $x_n = u_n + a\, v_n$ و $y_n = u_n + b\, v_n$ حيث a و b عددان حقيقيان متمايزان .
3 ـ أوجد a و b حتى تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتان ثم عبر عن x_n و y_n بدلالة n
4 ـ أوجد النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n) .

الحـل ـ 50

1 ـ الإستدلال بالتراجع :

من أجل $n = 0$: $u_0 < v_0$ لأن $-1 < 2$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$:
$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$
$$v_1 = \frac{u_0 + 4\, v_0}{5} = \frac{-1+8}{5} = \frac{7}{5}$$

لدينا $1/2 < 7/5$ إذن : $u_1 < v_1$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_n < v_n$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} < v_{n+1}$ ؟

لدينا :
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4\, v_n}{5}$$
$$= \frac{5\, u_n + 5\, v_n - 2\, u_n - 8\, v_n}{10}$$
$$= \frac{3\, u_n - 3\, v_n}{10}$$
$$= \frac{3}{10}(u_n - v_n)$$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n < v_n$ أي $u_n - v_n < 0$

منه : $\frac{3}{10}(u_n - v_n) < 0$ أي $u_{n+1} - v_{n+1} < 0$ أي $u_{n+1} < v_{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2 ـ هل (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

إتجاه التغير : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$
$$= \frac{u_n + v_n - 2\, u_n}{2}$$
$$= \frac{-1}{2}(u_n - v_n)$$

لكن $u_n - v_n < 0$ إذن : $-\frac{1}{2}(u_n - v_n) > 0$ منه : $u_{n+1} - u_n > 0$

أي : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4\, v_n}{5} - v_n$$
$$= \frac{u_n + 4\, v_n - 5\, v_n}{5}$$
$$= \frac{1}{5}(u_n - v_n)$$

لكن $u_n - v_n < 0$ إذن : $\frac{1}{5}(u_n - v_n) < 0$ منه : $v_{n+1} - v_n < 0$

أي : المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

نهاية الفرق $u_n - v_n$

لما n يؤول إلى ما لا نهاية فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1})$

لكن : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$ حسب السؤال (1)

إذن : $\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = \frac{3}{10} \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$

أي : $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \frac{3}{10} \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$ لأن في جوار $+\infty$ فإن $\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$

منه : $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

خلاصة : (u_n) متتالية متزايدة تماما ، (v_n) متتالية متناقصة تماما ، $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

إذن : هما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ حيث $\ell \in IR$

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $x_{n+1} = u_{n+1} + a\, v_{n+1}$

$$= \frac{u_n + v_n}{2} + a\left(\frac{u_n + 4 v_n}{5}\right)$$

$$= \frac{5 u_n + 5 v_n + 2 a u_n + 8 a v_n}{10}$$

$$= \frac{(2a+5) u_n + (8a+5) v_n}{10}$$

$$= \frac{2a+5}{10} \times \left(u_n + \frac{8a+5}{2a+5} v_n\right)$$ حيث $2a+5 \neq 0$

إذن : تكون (x_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق أن من أجل كل $n \in IN$

$x_{n+1} = \frac{2a+5}{10} x_n$ أي من أجل كل $n \in IN$: $u_n + \frac{8a+5}{2a+5} v_n = u_n + a\, v_n$

إذن : يكفي و يلزم أن يكون : $\frac{8a+5}{2a+5} = a$ مع $2a+5 \neq 0$

أي : $2a^2 + 5a = 8a + 5$

أي : $2a^2 - 3a - 5 = 0$ و هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول a .

$\Delta = 9 + 40 = 49$

$a_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$

$a_2 = \frac{3-7}{4} = -1$

لاحظ أن من أجل $a = -1$ فإن $2a + 5 = 3 \neq 0$

إذن : يكفي أن ناخذ $a = -1$

في هذه الحالة : $x_{n+1} = \frac{3}{10} x_n$

أي (x_n) متتالية هندسية أساسها 3/10 و حدها الأول $x_0 = u_0 - v_0 = -3$ إذن : $x_n = -3\left(\frac{3}{10}\right)^n$.

من أجل $a = 5/2$ فإن $2a + 5 = 10 \neq 0$

إذن : من أجل $a = 5/2$ فإن $x_{n+1} = 1 \times x_n$

أي المتتالية (x_n) هندسية أساسها 1 (ثابتة)

نتيجة : تكون المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_{n+1} = u_n + b\, v_n$ هندسية حيث $b \neq -1$ إذا وفقط إذا كان $b = 5/2$

و في هذة الحالة المتتالية (y_n) ثابتة و كل حدودها تساوي $y_0 = u_0 + \frac{5}{2} v_0 = -1 + 5 = 4$

منه : من أجل كل $n \in IN$ فإن $y_n = 4$

4 ـ لتكن $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$

لدينا من أجل كل $n \in IN$: $y_n = u_n + \frac{5}{2} v_n$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} \left(u_n + \frac{5}{2} v_n\right)$

إذن : $4 = \ell + \frac{5}{2}\ell$

أي : $4 = \frac{7}{2}\ell$

منه : $\ell = 8/7$ و هو المطلوب

إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 8/7$

التمرين – 51

لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على IN و التي تحقق الخاصية

$$u_{n+2} = \frac{3}{35} u_{n+1} + \frac{2}{35} u_n$$

1 – هل توجد في المجموعة (E) متتالية ثابتة ؟ متتالية حسابية ؟ متتالية هندسية ؟

2 – تحقق أن : من أجل كل عددين حقيقين α و β تكون المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$ عنصر من المجموعة (E)

3 – عين المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$ علما أن $u_0 = 3$ و $u_1 = -4/35$ ثم أحسب نهاية هذه المتتالية .

الحـل – 51

1 – لتكن (u_n) عنصر من المجموعة (E)

إذا كانت (u_n) ثابتة فإن من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+2} = u_{n+1} = u_n$

إذن الخاصية تصبح : $u_n = \frac{3}{35} u_n + \frac{2}{35} u_n$

أي : $u_n = \frac{5}{35} u_n$

منه : $u_n = 0$

أي : المتتالية (u_n) معدومة .

نتيجة : لا توجد أي متتالية ثابتة من المجموعة (E) .

إذا كانت (u_n) حسابية نسمي α أساسها إذن $\left.\begin{array}{l} u_{n+2} = u_n + 2\alpha \\ u_{n+1} = u_n + \alpha \end{array}\right\}$

إذن الخاصية تصبح : $u_n + 2\alpha = \frac{3}{35}(u_n + \alpha) + \frac{2}{35} u_n$

أي : $u_n + 2\alpha = \left(\frac{3}{35} + \frac{2}{35}\right) u_n + \frac{3}{35}\alpha$

أي : $u_n - \frac{1}{7} u_n = \frac{3}{35}\alpha - 2\alpha$

أي : $\frac{6}{7} u_n = \frac{-67}{35}\alpha$

أي : $u_n = \frac{-67}{35} \times \frac{7}{6}\alpha$

أي : $u_n = \frac{-67}{30}\alpha$

أي : المتتالية (u_n) ثابتة و عليه $\alpha = 0$ (لأن (u_n) حسابية)

إذن : المتتالية (u_n) معدومة .

نتيجة : لا توجد أي متتالية حسابية من المجموعة (E) .

إذا كانت (u_n) هندسية نسمي α أساسها إذن $\left.\begin{array}{l} u_{n+2} = \alpha^2 u_n \\ u_{n+1} = \alpha u_n \end{array}\right\}$

إذن الخاصية تصبح : $(1)..........\ \alpha^2 u_n = \frac{3}{35}\alpha u_n + \frac{2}{35} u_n$

بما أن المتتالية (u_n) ليست معدومة فإن $u_n \neq 0$ من أجل كل $n \in IN$

إذن : العلاقة (1) تصبح بعد القسمة على u_n : $\alpha^2 = \frac{3}{35}\alpha + \frac{2}{35}$

أي : $35\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$

و هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول α .

$$\Delta = 9 + 280 = 289$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{3-17}{70} = \frac{-14}{70} = \frac{-1}{5} \\ \alpha_2 = \frac{3+17}{70} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

نتيجة : كل المتتاليات الهندسية ذات الأساس (1/5-) أو (2/7) و ذات الحد الأول غير معدوم هي متتاليات من المجموعة (E) .

2 – $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

إذن :

$$\frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n = \frac{3}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right]$$

$$= \frac{3\alpha}{35} \times \frac{2}{7} \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{3\beta}{35} \times \left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n + \frac{2\alpha}{35}\left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{2}{35}\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{6\alpha}{35\times 7} + \frac{2\alpha}{35}\right)\times\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{-3\beta}{35\times 5} + \frac{2\beta}{35}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{6\alpha + 14\alpha}{35\times 7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{-3\beta + 10\beta}{35\times 5}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{20\alpha}{5\times 7\times 7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{7\beta}{7\times 5\times 5}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \frac{4\alpha}{7\times 7}\left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{\beta}{5\times 5}\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2}$$

$$= u_{n+2}$$

نتيجة : $u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n$ إذن : المتتالية (u_n) عنصر من المجموعة (E)

3 – $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

$u_0 = 3$ إذن : $3 = \alpha + \beta\ ....\ (1)$

$u_1 = \frac{-4}{35}$ إذن : $\frac{-4}{35} = \frac{2}{7}\alpha - \frac{1}{5}\beta$ أي $-4 = 10\alpha - 7\beta\ ....\ (2)$

لنحل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ 10\alpha - 7\beta + 4 = 0 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} 10\alpha + 10\beta - 30 = 0 \\ 10\alpha - 7\beta + 4 = 0 \end{cases}$$

منه :

$$\begin{cases} 17\beta - 34 = 0 \\ 10\alpha = 7\beta - 4 \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} \beta = \dfrac{34}{17} = 2 \\ \alpha = \dfrac{7\beta - 4}{10} \end{cases}$$

أخيرا : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ إذن $u_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$

لأن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$

التمرين ـــ 52

1 ـــ أدرس إتجاه تغير كل من الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0 ; +\infty[$ بـــ

$$g(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{و} \quad f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$$

2 ـــ برهن أن من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن (1) $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ .....

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على IN^* بـــ $u_1 = 3/2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

3 ـــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ $u_n > 0$

4 ـــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

5 ـــ نضع $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$ و $t_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^n}$

باستعمال العلاقة (1) برهن أن $S_n - \frac{1}{2}t_n \le \ln u_n \le S_n$

أحسب S_n و t_n بدلالة n ثم إستنتج نهاية كل من S_n و t_n

الحـــل ـــ 52

1 ـــ $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$

f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1 - x^2 - 1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$$

لاحظ أن : على المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $1 + x > 0$ إذن : $\frac{-x^2}{1+x} \le 0$

منه : الدالة f متناقصة على المجال $]0 ; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	0 → $+\infty$
f(x)	0 ↘ $-\infty$

$$g(x) = \ln(1+x) - x$$

g معرفة و قابلة للإشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - 1 - x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

لاحظ أن على المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $1 + x > 0$ إذن : $\frac{-x}{1+x} \le 0$

منه الدالة g متناقصة على المجال $]0 ; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	0 → $+\infty$
g(x)	0 ↘ $-\infty$

2 ـ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$ فإن $f(x) \leq 0$

أي : من أجل كل x موجب فإن $x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x) \leq 0$

منه : من أجل كل x موجب فإن $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$ .... (2)

و حسب جدول تغيرات الدالة g فإن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$ فإن $g(x) \leq 0$

أي : من أجل كل x موجب فإن $\ln(1+x) - x \leq 0$

منه : من أجل كل x موجب فإن $\ln(1+x) \leq x$ .... (3)

من العلاقتين (2) و (3) نستنتج أن :

من أجل كل x موجب فإن $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ .... (1)

3 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل n من IN^* : $u_n > 0$

من أجل $n = 1$: $u_1 = 3/2$ و $3/2 > 0$ إذن الخاصية محققة .

نفرض أن : $u_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا $u_n > 0$ حسب فرضية التراجع

إذن : $u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ لأن $1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

أي : $u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية صحيحية من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من IN^* : $u_n > 0$

4 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

نبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$: $u_1 = 3/2$ إذن : $\ln u_1 = \ln \frac{3}{2}$

لكن $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

إذن: $\ln u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

منه : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ من أجل $n > 1$

هل $\ln u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ ؟

لدينا :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln\left[u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]$$

$$= \ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

5 ـ حسب السؤال (2) فإن من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$ فإن : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

لنكتب هذه العلاقة من أجل $x = \frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2^2}$ ، $x = \frac{1}{2^3}$; .... $x = \frac{1}{2^n}$ كما يلي :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \le \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \le \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n}$$

بجمع هذه المتباينات طرف لـ طرف نحصل على :

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right) \le \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

أي $S_n - \frac{1}{2} t_n \le \ln u_n \le S_n$ و هو المطلوب

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$t_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{3}$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

التمرين ــ 53

(u_n) المتتالية المعرفة على IN بـ $u_0 = 1,5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n - 1$

المطلوب : ميز فيمايلي بين الجمل الصحيحة و الخاطئة مع التبرير .

1 ــ المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1 الذي هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الذين معادلتيهما $y = x$ و $y = 2x - 1$

2 ــ المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ $v_n = u_n - 1$ هي متتالية هندسية .

3 ــ المتتالية (v_n) المعرفة في السؤال (2) محدودة من الأعلى .

الحـل ــ 53

1 ــ لنثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة (بالتراجع)

لدينا : $u_1 = 2u_0 - 1 = 2(1,5) - 1 = 2$

إذن : $u_1 > u_0$

نفرض أن $u_n - u_{n-1} > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} - u_n > 0$ ؟

$$u_{n+1} - u_n = 2\,u_n - 1 - u_n$$
$$= u_n - 1$$

لكن $u_n > u_0 > 1$ حسب فرضية التراجع

إذن : $u_n - 1 > 0$

منه : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة من أجل $n + 1$

نتيجة : المتتالية (u_n) متزايدة على IN

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > u_0 > 1$

و عليه : فالمتتالية (u_n) لا يمكن أن تتقارب نحو العدد 1 .

2 ــ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$
$$= 2\,u_n - 1 - 1$$
$$= 2\,u_n - 2$$
$$= 2(u_n - 1)$$
$$= 2\,v_n$$

إذن : فعلا (v_n) متتالية هندسية أساسها 2

3 ــ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 1,5 - 1 = 0.5$

إذن : $v_n = 0,5 \times 2^n$

نتيجة: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,5 \times 2^n = +\infty$

إذن : المتتالية (v_n) متباعدة نحو $+\infty$

إذن : فهي متتالية غير محدودة من الأعلى .

الموافقـــات في Z

Kimou.

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان .
نقول أن العددين a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان لهما نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n
و نكتب $a \equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n

أمثلة : $13 \equiv 3[5]$ لأن باقي قسمة كل من 13 و 3 على 5 هو 3
$27 \equiv 92[5]$ لأن باقي قسمة كل من 27 و 92 على 5 هو 2
$-20 \equiv 1[7]$ لأن باقي قسمة كل من 20 - و 1 على 7 هو 1

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x \equiv 0[1]$

مبرهنة : n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان
يكون $a \equiv b[n]$ إذا و فقط إذا كان a - b مضاعف n أي يوجد عدد صحيح k حيث $a = nk + b$

أمثلة :
$100 - 7$ مضاعف 3 إذن : $100 \equiv 7[3]$
$-20 - 1$ مضاعف 3 إذن : $-20 \equiv 1[3]$

نشاط : ضع صحيح أو خطأ مع التعليل :
1 ــ $26 \equiv 11[5]$ 3 ــ $478 \equiv 32[5]$
2 ــ $-32 \equiv 18[10]$ 4 ــ $58 \equiv -5[7]$

الحــل :
1 ــ $26 \equiv 11[5]$ صحيح لأن $26 - 11 = 15$ مضاعف 5
2 ــ $-32 \equiv 18[10]$ صحيح لأن $-32 - 18 = -50$ مضاعف 10
3 ــ $478 \equiv 32[5]$ خطأ لأن $478 - 32 = 446$ ليس مضاعف 5
4 ــ $58 \equiv -5[7]$ صحيح لأن $58 - (-5) = 63$ مضاعف 7

خاصية أساسية : n عدد طبيعي أكبر تماما من 1
كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n (القسمة الإقليدية)

أمثلة : $17 \equiv 2[5]$ ؛ $30 \equiv 6[8]$

خواص : n و p عددان طبيعيان غير معدومان .
a ؛ b ؛ c ؛ d أعداد صحيحة .
1 ــ $a \equiv a[n]$ خاصية الإنعكاس
2 ــ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$ خاصية التناظر
3 ــ إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases}$ فإن $a \equiv c[n]$ خاصية التعدي
4 ــ إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$ خاصية الجمع
5 ــ إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ فإن $ac \equiv bd[n]$ خاصية الجداء
6 ــ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ac \equiv bc[n]$ خاصية الضرب في عدد صحيح
7 ــ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$ خاصية الأس

ملاحظة : من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين n و p و من أجل كل عددين صحيحين a و b فإن :
$a \equiv b[n]$ يكافئ $ap \equiv bp[np]$

نشاط : عين باقي قسمة (5817 -) على 251

الحــل : بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 5817 & 251 \\ \underline{502} & 23 \\ 797 & \\ \underline{753} & \\ 44 & \end{array}$$

إذن : $5817 = 251(23) + 44$

منه : $-5817 = 251(-23) - 44$

أي : $-5817 = 251(-23) - 44 + 251 - 251$

أي : $-5817 = 251(-24) + 207$

منه : $-5817 \equiv 207[251]$

ملاحظة : يمكن إيجاد هذه النتيجة باستعمال الخواص كمايلي :

لدينا باقي قسمة 5817 على 251 هو 44 إذن : $5817 \equiv 44[251]$

منه : $-5817 \equiv -44[251]$ (خاصية الضرب في عدد صحيح)

من جهة أخرى : $\begin{cases} -44 \equiv -44[251] \\ 0 \equiv 251[251] \end{cases}$ إذن : $-44 \equiv 251 - 44[251]$ (خاصية الجمع)

أي $-44 \equiv 207[251]$

نتيجة : حسب علاقة التعدي $-5817 \equiv -44[251]$ و $-44 \equiv 207[251]$

إذن : $-5817 \equiv 207[251]$

نشاط : عين الأعداد الصحيحة x حيث $x + 4 \equiv 2[7]$

الحــل : $\begin{cases} x + 4 \equiv 2[7] \\ -4 \equiv -4[7] \end{cases}$ إذن : $x + 4 - 4 \equiv 2 - 4[7]$

أي : $x \equiv -2[7]$

منه : $x + 0 \equiv -2 + 7[7]$ لأن $0 \equiv 7[7]$

أي : $x \equiv 5[7]$

نتيجة : $x = 7k + 5$ حيث $k \in Z$

نشاط : عين قيم العدد الصحيح x حيث $5x \equiv 3[7]$

الحــل : لتعيين قيم x ندرس، بواقي قسمة $5x$ على 7 من أجل كل البواقي الممكنة لـــ x على 7

و هي 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6

إذن : لما $x \equiv 0[7]$ فإن $5x \equiv 0[7]$

لما $x \equiv 1[7]$ فإن $5x \equiv 5[7]$

لما $x \equiv 2[7]$ فإن $5x \equiv 10[7]$ أي $5x \equiv 3[7]$

لما $x \equiv 3[7]$ فإن $5x \equiv 15[7]$ أي $5x \equiv 1[7]$

لما $x \equiv 4[7]$ فإن $5x \equiv 20[7]$ أي $5x \equiv 6[7]$

لما $x \equiv 5[7]$ فإن $5x \equiv 25[7]$ أي $5x \equiv 4[7]$

لما $x \equiv 6[7]$ فإن $5x \equiv 30[7]$ أي $5x \equiv 2[7]$

نتيجة : يكون $5x \equiv 3[7]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 2[7]$

أي $x = 7k + 2$ حيث $k \in Z$

ملاحظة : يمكن تلخيص هذه الإجابة في الجدول التالي :

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \equiv ?[7]$	0	5	3	1	6	4	2

إذن : $5x \equiv 3[7]$ من أجل $x \equiv 2[7]$ أي $x = 7k + 2$

نشاط : ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 5

ثم إستنتج باقي قسمة العدد 3^{4039} على 5

الحــل : لنبحث عن بواقي قسمة 3^n على 5 من أجل قيم مختلفة لـــ n كمايلي :

$n = 0 \longrightarrow 3^0 \equiv 1[5]$

$n = 1 \longrightarrow 3^1 \equiv 3[5]$

$n = 2 \longrightarrow 3^2 \equiv 4[5]$

$n = 3 \longrightarrow 3^3 \equiv 2[5]$

$n = 4 \longrightarrow 3^4 \equiv 1[5]$

$n = 5 \longrightarrow 3^5 \equiv 3[5]$

$n = 6 \longrightarrow 3^6 \equiv 4[5]$

$n = 7 \longrightarrow 3^7 \equiv 2[5]$

$n = 8 \longrightarrow 3^8 \equiv 1[5]$

$n = 9 \longrightarrow 3^9 \equiv 3[5]$

$n = 10 \longrightarrow 3^{10} \equiv 4[5]$

$n = 11 \longrightarrow 3^{11} \equiv 2[5]$

نتيجة :

لما $n = 4k$ فإن $3^n \equiv 1[5]$

لما $n = 4k + 1$ فإن $3^n \equiv 3[5]$

لما $n = 4k + 2$ فإن $3^n \equiv 4[5]$

لما $n = 4k + 3$ فإن $3^n \equiv 2[5]$

بما أن $4039 = 4(1009) + 3$ فإن $3^{4039} \equiv 3^{4(1009)+3} \equiv 3^{4k+3} \equiv 2[5]$

إذن : باقي قسمة 3^{4039} على 5 هو 2

التعداد

مبرهنة : x عدد طبيعي أكبر تماما من 1

كل عدد طبيعي a حيث $a \geq x$ يكتب بطريقة وحيدة من الشكل .

حيث $a = q\,x^n + r_{n-1}\,x^{n-1} + r_{n-2}\,x^{n-2} + \dots\dots\dots + r_2\,x^2 + x_1\,r_1 + r_0$ و q و r_i أعداد طبيعية

و $0 < q < x$ و $0 \leq r_i < x$

مثال : $x = 2$ ؛ $a = 29$

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1$$
$$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

إذن : $q = 1$ ؛ $n = 4$ ؛ $r_0 = 1$ ؛ $r_1 = 0$ ؛ $r_2 = 1$ ؛ $r_3 = 1$

نتيجة : x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و a عدد طبيعي .

1 ـ إذا كان $a < x$ نسمي a رقما في النظام ذو الأساس x و نرمز له برمز وحيد

2 ـ إذا كان $a \geq x$ نمثل العدد a في النظام ذو الأساس x بـ $\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\dots\dots r_1\,r_0}$

حيث $a = q\,x^n + r_{n-1}\,x^{n-1} + \dots\dots r_1\,x + r_0$ و $0 < q < x$ و $0 \leq r_i < x$

حالة خاصة : إذا كان $x = 10$ نكتب $a = q\,r_{n-1}\dots\dots r_1\,r_0$ و يسمى النظلم العشري

مثال : في المثال السابق لدينا : $29 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$

إذن : العدد 29 يكتب $\overline{11101}$ في النظام ذو الأساس 2

ملاحظة : أرقام النظام ذو الأساس x هي $\{0 ; 1 ; 2 ; \dots\dots ; (x-1)\}$

مثلا : النظام ذو الأساس 2 له الأرقام $\{0 ; 1\}$

النظام ذو الأساس 5 له الأرقام $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

النظام العشري له الأرقام $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

التعداد و قابلية القسمة في N

ليكن A عدد طبيعي يكتب في النظام العشري $A = a_n\,a_{n-1}\dots\dots\dots a_2\,a_1\,a_0$

1 ـ يكون A قابلا للقسمة على 10 إذا و فقط إذا كان $a_0 = 0$

2 ـ يكون A قابلا للقسمة على 2 إذا و فقط إذا كان $a_0 \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$

3 ـ يكون A قابلا للقسمة على 5 إذا و فقط إذا كان $a_0 \in \{0 ; 5\}$

4 ـ يكون A قابلا للقسمة على 3 إذا و فقط إذا كان $(a_n + a_{n-1} + \dots\dots + a_1 + a_0) \equiv 0[3]$

5 ـ يكون A قابلا للقسمة على 9 إذا و فقط إذا كان $(a_n + a_{n-1} + \dots\dots + a_1 + a_0) \equiv 0[9]$

6 ـ يكون A قابلا للقسمة على 4 إذا و فقط إذا كان $(10\,a_1 + a_0) \equiv 0[4]$

7 ـ يكون A قابلا للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $((-1)^n\,a_n + (-1)^{n-1}\,a_{n-1} + \dots\dots - a_1 + a_0) \equiv 0[11]$

أمثلة :

العدد 567 لا يقبل القسمة على 10 لأن $7 \neq 0$

العدد 1728 يقبل القسمة على 4 لأن 28 مضاعف 4

العدد 115 يقبل القسمة على 5

العدد 17382 يقبل القسمة على 3 لأن $(2 + 8 + 3 + 7 + 1)$ مضاعف 3

العدد 7345591 يقبل القسمة على 11 لأن $(1 + 9 - 5 + 5 - 4 + 3 - 7)$ مضاعف 11

العدد 275841 يقبل القسمة على 9 لأن $(1 + 4 + 8 + 5 + 7 + 2)$ مضاعف 9

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـــ 1

برر صحة العبارات التالية :

1 ـــ $45 \equiv 3[7]$ 　 3 ـــ $-13 \equiv 2[3]$ 　 5 ـــ $137 \equiv -3[5]$

2 ـــ $29 \equiv -1[6]$ 　 4 ـــ $152 \equiv 2[3]$ 　 6 ـــ $-17 \equiv -7[10]$

الحـل ـــ 1

1 ـــ $45 - 3 = 42$ و 42 مضاعف 7 إذن : $45 \equiv 3[7]$

2 ـــ $29 - (-1) = 30$ و 30 مضاعف 6 إذن : $29 \equiv -1[6]$

3 ـــ $-13 - 2 = -15$ و -15 مضاعف 3 إذن : $-13 \equiv 2[3]$

4 ـــ $152 - 2 = 150$ و 150 مضاعف 3 إذن : $152 \equiv 2[3]$

5 ـــ $137 - (-3) = 140$ و 140 مضاعف 5 إذن : $137 \equiv -3[5]$

6 ـــ $-17 - (-7) = -10$ و -10 مضاعف 10 إذن : $-17 \equiv -7[10]$

التمرين ـــ 2

عين خمسة أعداد صحيحة x تحقق $37 \equiv x[4]$

ما هو العدد الطبيعي x الذي يكون أصغر ما يمكن حيث $37 \equiv x[4]$

الحـل ـــ 2

$37 - 5 = 32$ و 32 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 5[4]$

$37 - (-3) = 40$ و 40 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv -3[4]$

$37 - 13 = 24$ و 24 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 13[4]$

$37 - 9 = 28$ و 28 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 9[4]$

$37 - 17 = 20$ و 20 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 17[4]$

أصغر عدد طبيعي x يحقق $37 \equiv x[4]$ هو باقي القسمة الإقليدية لـــ 37 على 4 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ \underline{36} & 9 \\ 1 & \end{array}$$

إذن : $x = 1$

التمرين ـــ 3

عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث $n \equiv 4[7]$

الحـل ـــ 3

أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \equiv 4[7]$ هو $n = 4$ لأن $4 - 4 = 0$ و 0 مضاعف 7

لكن لدينا $7 \equiv 0[7]$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} 4 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ منه : $11 \equiv 4[7]$ (باستعمال خاصية الجمع)

بنفس الطريقة لدينا $\left\{\begin{array}{l} 11 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ إذن : $18 \equiv 4[7]$ (دائما خاصية الجمع)

$\left\{\begin{array}{l} 18 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ إذن : $25 \equiv 4[7]$

$\left\{\begin{array}{l} 25 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ إذن : $32 \equiv 4[7]$ نتوقف لأن $32 > 30$

خلاصة : الأعداد المطلوبة n هي $\{4 ; 11 ; 18 ; 25\}$

التمرين ــ 4

n عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$

عين باقي قسمة العدد n على 12

الحــل ــ 4

لنبحث عن باقي قسمة 140 على 12 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 140 & 12 \\ 12 & 11 \\ 20 & \\ 12 & \\ 8 & \end{array}$$

إذن : $140 \equiv 8[12]$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} n \equiv 140[12] \\ 140 \equiv 8[12] \end{array}\right\}$ منه : حسب خاصية التعدي $n \equiv 8[12]$

بما أن $0 \le 8 < 12$ فإن 8 هو باقي قسمة n على 12

التمرين ــ 5

x عدد صحيح باقي قسمته على 7 هو 2

عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية :

$x + 5$ ؛ $x - 5$ ؛ $9x$ ؛ $-15x$ ؛ x^3

الحــل ــ 5

باقي قسمة x على 7 هو 2 إذن : $x \equiv 2[7]$

منه النتائج التالية :

1 ــ $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ 5 \equiv 5[7] \end{array}\right\}$ إذن : $x + 5 \equiv 2 + 5[7]$

أي $x + 5 \equiv 0[7]$ لأن $7 \equiv 0[7]$

منه : باقي قسمة $x + 5$ على 7 هو 0

2 ــ $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ -5 \equiv -5[7] \end{array}\right\}$ إذن : $x - 5 \equiv 2 - 5[7]$

من جهة أخرى لدينا $0 \equiv 7[7]$

إذن : $\left.\begin{array}{l} x - 5 \equiv -3[7] \\ 0 \equiv 7[7] \end{array}\right\}$ منه $x - 5 \equiv 7 - 3[7]$ أي $x - 5 \equiv 4[7]$

إذن : باقي قسمة $x - 5$ على 7 هو 4

3 ــ $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ 9 \equiv 2[7] \end{array}\right\}$ إذن : $9x \equiv 2 \times 2[7]$

أي باقي قسمة $9x$ على 7 هو 4

4 ــ $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ -15 \equiv -1[7] \end{array}\right\}$ إذن : $-15x \equiv -2[7]$

منه : $\left.\begin{array}{l} -15x \equiv -2[7] \\ 0 \equiv 7[7] \end{array}\right\}$

إذن : $-15x \equiv 5[7]$

أي باقي قسمة $-15x$ على 7 هو 5

5 ــ $x \equiv 2[7]$ إذن : $x^3 \equiv 2^3[7]$ (خاصية الأس)

أي : $x^3 \equiv 8[7]$

منه : $x^3 \equiv 1[7]$ لأن $8 \equiv 1[7]$

أي باقي قسمة x^3 على 7 هو 1

التمرين ــ 6

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2

في كل حالة من الحالات التالية عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الموافقة :

1 ــ $46 \equiv 0[n]$ 2 ــ $10 \equiv 1[n]$ 3 ــ $27 \equiv 5[n]$

الحــل ــ 6

1 ــ $46 \equiv 0[n]$ إذن : 46 مضاعف n

منه : n قاسم لــ 46 $(n \ge 2)$

إذن : $n \in \{2 ; 23 ; 46\}$

2 ــ $10 \equiv 1[n]$ إذن : $10 - 1$ مضاعف n

أي n مضاعف 9

أي n قاسم لـ 9 $(n \geq 2)$

منه : $n \in \{3 ; 9\}$

3 ـ $27 \equiv 5[n]$ إذن : $27 - 5$ مضاعف n

أي 22 مضاعف n

منه n قاسم لـ 22 $(n \geq 2)$

إذن : $n \in \{2 ; 11 ; 22\}$

<u>التمرين ــ 7</u>

n و m عددان طبيعيان غير معدومان .

a و b عددان صحيحان .

أثبت أن : $a \equiv b[n]$ يكافئ $a m \equiv b m[n m]$

<u>الحـل ــ 7</u>

لاثبات صحة هذا التكافؤ يكفي أن نثبت الشرطين التاليين :

(1) إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a m \equiv b m[n m]$

(2) إذا كان $a m \equiv b m[n m]$ فإن $a \equiv b[n]$

إثبات الشرط (1)

ليكن $a \equiv b[n]$ إذن : $(a - b)$ مضاعف n

منه : $m(a - b)$ مضاعف $n m$

أي $a m - b m$ مضاعف $n m$

أي $a m \equiv b m[n m]$

أي الشرط (1) محقق .

إثبات الشرط (2)

ليكن $a m \equiv b m[n m]$ إذن : $(a m - b m)$ مضاعف $n m$

أي : $m(a - b)$ مضاعف $n m$

أي $(a - b)$ مضاعف n لأن $m \neq 0$

أي $a \equiv b[n]$

إذن : الشرط (2) محقق .

خلاصة : $a \equiv b[n]$ يكافئ $a m \equiv b m[n m]$

<u>التمرين ــ 8</u>

$C , B , A . c , b , a$ أعداد حقيقية .

برهن أن إذا كانت الأعداد $(A - a)$ ؛ $(B - b)$ ؛ $(C - c)$ تقبل القسمة على عدد طبيعي غير معدوم n فإن العدد $(ABC - abc)$ يقبل القسمة على n

<u>الحـل ــ 8</u>

$(A - a)$ مضاعف n إذن : $A \equiv a[n]$ .... (1)

$(B - b)$ مضاعف n إذن : $B \equiv b[n]$ .... (2)

$(C - c)$ مضاعف n إذن : $C \equiv c[n]$ .... (3)

باستعمال خاصية الجداء بين (1) و (2) نحصل على $AB \equiv a b[n]$ ....(4)

باستعمال خاصية الجداء بين (3) و (4) نحصل على $ABC \equiv abc[n]$

أي $(ABC - abc)$ مضاعف n

أي $(ABC - abc)$ يقبل القسمة على n

<u>التمرين ــ 9</u>

n و m عددان طبيعيان غير معدومين . حيث $n \equiv 0[m]$

a و b عددان صحيحان .

أثبت أن : إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a \equiv b[m]$

الحــل ـــ 9

$\left.\begin{array}{l} n \equiv 0[m] \\ a \equiv b[n] \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} n \text{ مضاعف } m \\ a - b \text{ مضاعف } n \end{array}\right\}$

أي $(a - b)$ مضاعف m (بالتعدي)

منه : $a \equiv b[m]$

التمرين ـــ 10

c, b, a أعداد صحيحة حيث $a \equiv 30757[10]$ ؛ $b \equiv 15163[10]$ ؛ $c \equiv 12924[10]$

1 ـــ بسط الموافقات المعطاة .

2 ـــ عين العدد الطبيعي x حيث $0 \leq x \leq 9$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $a + b + c \equiv x[10]$ د) $a - b + c \equiv x[10]$

ب) $a + b - c \equiv x[10]$ هـ) $abc \equiv x[10]$

ج) $ab + ac + bc \equiv x[10]$ و) $a^2 + b^2 + c^2 \equiv x[10]$

الحــل ـــ 10

1 ـــ $a \equiv 30757[10]$ إذن : $a \equiv 7[10]$ لأن باقي قسمة 30757 على 10 هو 7

$b \equiv 15163[10]$ إذن : $b \equiv 3[10]$ لأن باقي قسمة 15163 على 10 هو 3

$c \equiv 12924[10]$ إذن : $c \equiv 4[10]$ لأن باقي قسمة 12924 على 10 هو 4

2 ـــ أ) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $a + b + c \equiv 7 + 3 + 4[10]$

أي : $a + b + c \equiv 4[10]$

أي $x = 4$

ب) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $a + b - c \equiv 7 + 3 - 4[10]$

أي : $a + b - c \equiv 6[10]$

أي $x = 6$

ج) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} ab \equiv 7 \times 3[10] \\ ac \equiv 7 \times 4[10] \\ bc \equiv 3 \times 4[10] \end{array}\right.$

أي : $\left\{\begin{array}{l} ab \equiv 1[10] \text{ لأن } 21 \equiv 1[10] \\ ac \equiv 8[10] \text{ لأن } 28 \equiv 8[10] \\ bc \equiv 2[10] \text{ لأن } 12 \equiv 2[10] \end{array}\right.$

أي $ab + ac + bc \equiv 1 + 8 + 2[10]$

أي $ab + ac + bc \equiv 1[10]$

أي $x = 1$

د) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $a - b + c \equiv 7 - 3 + 4[10]$

أي : $a - b + c \equiv 8[10]$

أي $x = 8$

هـ) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $abc \equiv 7 \times 3 \times 4[10]$

أي : $abc \equiv 4[10]$

أي $x = 4$

و) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} a^2 \equiv 7^2[10] \\ b^2 \equiv 3^2[10] \\ c^2 \equiv 4^2[10] \end{array}\right.$

$$a^2 \equiv 9[10]$$
أي : $\begin{cases} a^2 \equiv 9[10] \\ b^2 \equiv 9[10] \\ c^2 \equiv 6[10] \end{cases}$

منه $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 9 + 9 + 6[10]$

أي $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 4[10]$

أي $x = 4$

التمرين ــ 11

ABCDE مضلع منتظم محيط بالدائرة (C) كما هو موضح على الشكل المقابل .

M نقطة متحركة على الدائرة (C) إنطلاقا من النقطة A

نفرض أن الإتجاه المباشر هو الاتجاه العكسي لعقارب الساعة

أوجد نقطة الوصول في كل من الحالات التالية :

أ) M تقطع 15123 قوسا متتابعة في الإتجاه المباشر

ب) M تقطع 15132 قوسا متتابعة في الإتجاه غير المباشر .

الحــل ــ 11

بملاحظة الشكل نستنتج ما يلي:

أ) في الإتجاه المباشر

عدد الأقواس المقطوعة	نقطة الوصول
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	A
6	B
7	C
8	D
9	E

نتيجة :

ليكن x عدد الأقواس المقطوعة في الإتجاه المباشر إذن :

إذا كان $x \equiv 0[5]$ فإن نقطة الوصول هي A

إذا كان $x \equiv 1[5]$ فإن نقطة الوصول هي B

إذا كان $x \equiv 2[5]$ فإن نقطة الوصول هي C

إذا كان $x \equiv 3[5]$ فإن نقطة الوصول هي D

إذا كان $x \equiv 4[5]$ فإن نقطة الوصول هي E

منه : بعد قطع 15123 قوس متتابعة في الإتجاه المباشر فإن نقطة الوصول هي D لأن $15123 \equiv 3[5]$

ب) في الإتجاه غير المباشر :

عدد الأقواس المقطوعة	نقطة الوصول
0	A
1	E
2	D
3	C
4	B
5	A
6	E
7	D
8	C
9	B

نتيجة :

ليكن y عدد الأقواس المقطوعة في الإتجاه غير المباشر :

إذا كان $y \equiv 0[5]$ فإن نقطة الوصول هي A

إذا كان $y \equiv 1[5]$ فإن نقطة الوصول هي E

إذا كان $y \equiv 2[5]$ فإن نقطة الوصول هي D

إذا كان $y \equiv 3[5]$ فإن نقطة الوصول هي C

إذا كان $y \equiv 4[5]$ فإن نقطة الوصول هي B

نتيجة : بعد قطع 15132 قوسا متتابعة في الإتجاه غير المباشر فإن نقطة الوصول هي D لأن $15132 \equiv 2[5]$

التمرين ــ 12

عين باقي قسمة العدد 12^{1527} على 5

الحــل ــ 12

لدينا : $12 \equiv 2[5]$ إذن : $12^{1527} \equiv 2^{1527}[5]$

إذن : يكفي تعيين باقي قسمة 2^{1527} على 5 كما يلي :

ندرس أولا بواقي قسمة 2^n على 5 من أجل قيم مختلفة لـ n من N

$2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ منه:
- إذا كان $n = 4k$ فإن $2^n \equiv 1[5]$
- إذا كان $n = 4k+1$ فإن $2^n \equiv 2[5]$
- إذا كان $n = 4k+2$ فإن $2^n \equiv 4[5]$
- إذا كان $n = 4k+3$ فإن $2^n \equiv 3[5]$

حيث k عدد طبيعي .

$2^4 \equiv 1[5]$

$2^5 \equiv 2[5]$

$2^6 \equiv 4[5]$

$2^7 \equiv 3[5]$

نتيجة : $1527 = 4(381) + 3$ إذن : $1527 = 4k + 3$

منه : $2^{1527} \equiv 3[5]$

إذن : باقي قسمة 12^{1527} على 5 هو 3

التمرين ــ 13

عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد التالية على 5 :

1 ــ $(371)^{238}$ **3 ــ $(1429)^{2009}$**

2 ــ $(579)^{2008}$ **4 ــ $(1954)^{1962}$**

الحل ــ 13

1 ــ $371 \equiv 1[5]$ إذن : $(371)^{238} \equiv (1)^{238}[5]$

أي : $(371)^{238} \equiv 1[5]$

منه : باقي قسمة $(371)^{238}$ على 5 هو 1

2 ــ $579 \equiv 4[5]$

لكن $4 \equiv -1[5]$ لأن $4 - (-1)$ مضاعف 5

إذن : حسب علاقة التعدي فإن $579 \equiv -1[5]$

منه : $(579)^{2008} \equiv (-1)^{2008}[5]$

أي : $(579)^{2008} \equiv 1[5]$

إذن : باقي قسمة $(579)^{2008}$ على 5 هو 1

3 ــ $1429 \equiv 4[5]$ إذن : $1429 \equiv (-1)[5]$

منه $(1429)^{2009} \equiv (-1)^{2009}[5]$

أي $(1429)^{2009} \equiv -1[5]$

أي : $(1429)^{2009} \equiv 4[5]$ لأن $-1 \equiv 4[5]$

إذن : باقي قسمة $(1429)^{2009}$ على 5 هو 4

4 ــ $1954 \equiv 4[5]$ إذن : $1954 \equiv -1[5]$

منه : $(1954)^{1962} \equiv (-1)^{1962}[5]$

أي $(1954)^{1962} \equiv 1[5]$

منه باقي قسمة $(1954)^{1962}$ على 5 هو 1

التمرين ــ 14

عين بواقي قسمة الأعداد التالية على 9

1 ــ $(1754)^{12}$ **2 ــ $(34572)^{457}$**   **3 ــ $(375)^{2009}$**

الحل ــ 14

1 ــ

1754	9
85	194
44	
8	

إذن : $1754 \equiv 8[9]$

أي $1754 \equiv -1[9]$

منه $(1754)^{12} \equiv (-1)^{12}[9]$

أي $(1754)^{12} \equiv 1[9]$

منه باقي قسمة $(1754)^{12}$ على 9 هو 1

إذن : $34572 \equiv 3[9]$

2 —

34572	9
75	3841
37	
12	
3	

منه $(34572)^{457} \equiv (3)^{457}[9]$

أي : $(34572)^{457} \equiv 3^2 \times 3^{455}[9]$

أي $(34572)^{457} \equiv 9 \times 3^{455}[9]$

أي $(34572)^{457} \equiv 0[9]$ لأن 9×3^{455} مضاعف 9

منه : باقي قسمة $(34572)^{457}$ على 9 هو 0

---

3 —

375	9
15	41
6	

منه $375 \equiv 6[9]$

إذن $(375)^{2009} \equiv (6)^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv (2 \times 3)^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv 3^{2009} \times 2^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv 3^2 \times 3^{2007} \times 2^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv 9 \times 3^{2007} \times 2^{2009}$

أي $(375)^{2009} \equiv 0[9]$

منه : باقي قسمة $(375)^{2009}$ على 9 هو 0

التمرين — 15

برهن أن العدد $4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} + 1^{2009}$ يقبل القسمة على 5

الحـل — 15

$1 \equiv 1[5]$ إذن : $1^{2009} \equiv 1[5]$ ....(1)

$4 \equiv -1[5]$ إذن : $4^{2009} \equiv (-1)^{2009}[5]$ أي $4^{2009} \equiv -1[5]$ ....(2)

$3 \equiv -2[5]$ إذن : $3^{2009} \equiv (-2)^{2009}[5]$

أي $3^{2009} \equiv (-1)^{2009} \times 2^{2009}[5]$

أي : $3^{2009} \equiv -2^{2009}[5]$ ....(3)

$2 \equiv 2[5]$ إذن : $2^{2009} \equiv 2^{2009}[5]$ ....(4)

نتيجة : بجمع الموافقات (1) و (2) و (3) و (4) نحصل على :

$$1^{2009} + 4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} \equiv 1 - 1 - 2^{2009} + 2^{2009}[5]$$

أي : $1^{2009} + 4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} \equiv 0[5]$

منه : العدد $4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} + 1^{2009}$ يقبل القسمة على 5

التمرين — 16

برهن أن العدد $6^{2007} + 5^{2007} + 4^{2007} + 3^{2007} + 2^{2007} + 1^{2007}$ يقبل القسمة على 7

الحـل — 16

$1^{2007} \equiv 1[7]$ ....(1)

$6 \equiv -1[7]$ إذن : $6^{2007} \equiv (-1)^{2007}[7]$ أي $6^{2007} \equiv -1[7]$ .... (2)

$2^{2007} \equiv 2^{2007}[7]$ ....(3)

$5 \equiv -2[7]$ إذن : $5^{2007} \equiv (-2)^{2007}[7]$ أي $5^{2007} \equiv -2^{2007}[7]$ .... (4)

$3^{2007} \equiv 3^{2007}[7]$ ....(5)

$4 \equiv -3[7]$ إذن : $4^{2007} \equiv (-4)^{2007}[7]$ أي $4^{2007} \equiv -3^{2007}[7]$ .... (6)

بجمع الموافقات (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، (5) ، (6) طرف لـطرف نحصل على :

$$1^{2007} + 6^{2007} + 2^{2007} + 5^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} \equiv 1 - 1 + 2^{2007} - 2^{2007} + 3^{2007} - 3^{2007}[7]$$

أي : $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007} \equiv 0[7]$

منه : باقي قسمة العدد $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007}$ على 7 هو 0

التمرين — 17

برهن أن العدد $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2007} + 7^{2008} - 8^{2008}$ يقبل القسمة على 9

الحـل – 17

$1^{2008} \equiv 1[9]$ ....(1)

$8 \equiv -1[9]$ إذن : $8^{2008} \equiv (-1)^{2008}[9]$ منه $8^{2008} \equiv 1[9]$ .... (2)

$2^{2008} \equiv 2^{2008}[9]$ ....(3)

$7 \equiv -2[9]$ إذن : $7^{2008} \equiv (-2)^{2008}[9]$ منه $7^{2008} \equiv 2^{2008}[9]$ .... (4)

$3^{2008} = 3^2 \times 3^{2006}$ أي $3^{2008} = 9 \times 3^{2006}$ منه $3^{2008} \equiv 0[9]$ .....(5)

$4^{2008} \equiv 4^{2008}[9]$ ....(6)

$5 \equiv -4[9]$ إذن : $5^{2008} \equiv (-4)^{2008}[9]$ أي $5^{2008} \equiv 4^{2008}[9]$ .... (7)

$6^{2008} = 3^{2008} \times 2^{2008}$ إذن : $6^{2008} \equiv 0[9]$ لأن $3^{2008} \equiv 0[9]$

$1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008} \equiv 1 - 2^{2008} + 0 - 4^{2008} + 4^{2008} - 0 + 2^{2008} - 1$

أي : $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008} \equiv 0[9]$

إذن : العدد $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008}$ مضاعف 9

التمرين – 18

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابلا للقسمة على 4

الحـل – 18

من أجل $n > 0$:

$1^{2n+1} \equiv 1[4]$ ....(1)

$3 \equiv -1[4]$ إذن : $3^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1}[4]$ أي $3^{2n+1} \equiv -1[4]$ .... (2)

$2^{2n+1} = 2^2 \times 2^{2n-1}$ إذن : $2^{2n+1} = 4 \times 2^{2n-1}$ أي $2^{2n-1} \equiv 0[4]$ .... (3)

$4^{2n+1} \equiv 0[4]$ ....(4)

بجمع الموافقات (1) ، (2) ، (3) ، (4) نحصل على :

$1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv 1 + 0 - 1 + 0[4]$ أي $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv 0[4]$

إذن : العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابل للقسمة على 4

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابل للقسمة على 4

التمرين – 19

برر أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

1 – $7254^n \equiv 0[9]$ **3 – $1785^n \equiv 0[5]$**

2 – $3532^n \equiv 0[2]$ **4 – $51502^n \equiv 0[11]$**

الحـل – 19

1 – $7254 \equiv 0[9]$ منه $7254^n \equiv 0^n[9]$ أي $7254^n \equiv 0[9]$

2 – $3532 \equiv 0[2]$ منه $3532^n \equiv 0^n[2]$ أي $3532^n \equiv 0[2]$

3 – $1785 \equiv 0[5]$ منه $1785^n \equiv 0^n[5]$ أي $1785^n \equiv 0[5]$

4 – $51502 \equiv 0[11]$ منه $51502^n \equiv 0^n[11]$ أي $51502^n \equiv 0[11]$

التمرين – 20

1 – عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(3286)^{374}$ على 10

2 – عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(76)^{784}$ على 12

الحـل – 20

1 – $3286 \equiv 6[10]$ إذن $(3286)^{374} \equiv (6)^{374}[10]$

لندرس بواقي قسمة 6^n على 10 كمايلي :

$6^0 \equiv 1[10]$

$6^1 \equiv 6[10]$

$6^2 \equiv 6[10]$

$6^3 \equiv 6[10]$

⋮

منه $\begin{cases} \text{إذا كان } n = 0 \text{ فإن } 6^n \equiv 1[10] \\ \text{إذا كان } n \neq 0 \text{ فإن } 6^n \equiv 6[10] \end{cases}$

نتيجة : $6^{374} \equiv 6[10]$ إذن : باقي قسمة $(3286)^{374}$ على 10 هو 6

2 ـ $76 \equiv 4[12]$ إذن $(76)^{784} \equiv (4)^{784}[12]$

لندرس بواقي قسمة 4^n على 12 كمايلي :

$4^0 \equiv 1[12]$
$4^1 \equiv 4[12]$
$4^2 \equiv 4[12]$
$4^3 \equiv 4[12]$

منه { إذا كان $n = 0$ فإن $4^n \equiv 1[12]$ ؛ إذا كان $n \neq 0$ فإن $4^n \equiv 4[12]$ }

نتيجة : $4^{784} \equiv 4[12]$ إذن : باقي قسمة $(76)^{784}$ على 12 هو 4

التمرين ـ 21

1 ـ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

2 ـ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ليس مضاعف 3 فإن $2^{2n} + 2^n + 1$ مضاعف 7

الحـل ـ 21

1 ـ $3 \equiv -4[7]$ منه $3^{2n} \equiv (-4)^{2n}[7]$

أي $3^{2n} \equiv 4^{2n}[7]$

أي $3^{2n} \equiv 16^n[7]$

أي : $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ لأن : { $16 \equiv 2[7]$ إذن $16^n \equiv 2^n[7]$ }

نتيجة : $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ إذن : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

2 ـ ليكن n عدد طبيعي ليس مضاعف 3

إذن : $n = 3p + k$ حيث p عدد طبيعي و $k \in \{1 ; 2\}$

إذن : $2^{2n} + 2^n + 1 = 2^{2(3p+k)} + 2^{3p+k} + 1$

$= 2^{6p} \times 2^{2k} + 2^{3p} \times 2^k + 1$

$= 64^p \times 4^k + 8^p \times 2^k + 1$

منه : $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 64^p \times 4^k + 8^p \times 2^k + 1[7]$

أي : $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 4^k + 2^k + 1[7]$ لأن { $64 \equiv 1[7]$ ، $8 \equiv 1[7]$ } أي { $64^p \equiv 1[7]$ ، $8^p \equiv 1[7]$ }

من أجل $k = 1$: $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0[7]$

من أجل $k = 2$: $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 16 + 4 + 1 \equiv 0[7]$

نتيجة : من أجل كل n غير مضاعف 3 فإن العدد $2^{2n} + 2^n + 1$ مضاعف 7

التمرين ـ 22

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

الحـل ـ 22

$2^{n+4} = 2^n \times 2^4$ منه $2^{n+4} = 16 \times 2^n$

$3^{3n+2} = 3^{3n} \times 3^2$ منه $3^{3n+2} = (27)^n \times 9$

لدينا : $16 \equiv 1[5]$ إذن : $16 \times 2^n \equiv 2^n[5]$ أي $2^{n+4} \equiv 2^n[5]$ ....(1)

و $27 \equiv 2[5]$ إذن : $(27)^n \equiv 2^n[5]$

من جهة أخرى : $9 \equiv 4[5]$ أي $9 \equiv -1[5]$

نتيجة : { $(27)^n \equiv 2^n[5]$ ، $9 \equiv -1[5]$ } إذن $9 \times (27)^n \equiv -2^n[5]$

أي $3^{3n+2} \equiv -2^n[5]$ ....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $2^{n+4} + 3^{3n+2} \equiv 2^n - 2^n[5]$

أي : $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$ و هو المطلوب

التمرين ـ 23

n عدد طبيعي . نضع $a = (9n - 1)10^n + 1$

برهن أن a مضاعف للعدد 9

الحـل ـ 23

$9n \equiv 0[9]$ إذن : $9n - 1 \equiv -1[9]$ ....(1)

$10 \equiv 1[9]$ إذن : $10^n \equiv 1[9]$ ....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(9n-1)10^n \equiv -1[9]$ ....(3)
لكن $1 \equiv 1[9]$ ....(4)
إذن : بجمع (3) و (4) : $(9n-1)10^n + 1 \equiv -1+1[9]$
أي $(9n-1)10^n + 1 \equiv 0[9]$
أي $(9n-1)10^n + 1$ مضاعف 9

التمرين ـ 24

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ مضاعف 17

الحـل ـ 24

$3^{4n+2} = 3^2 \times 3^{4n}$ إذن : $3^{4n+2} = 9 \times (81)^n$
$2^{6n+3} = 2^3 \times 2^{6n}$ إذن : $2^{6n+3} = 8 \times (64)^n$

لدينا $\begin{cases} 81 \equiv 13[17] \\ 64 \equiv 13[17] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 81^n \equiv 13^n[17] \\ 64^n \equiv 13^n[17] \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 9 \times 81^n \equiv 9 \times 13^n[17] \\ 8 \times 64^n \equiv 8 \times 13^n[17] \end{cases}$

إذن : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv 9 \times 13^n + 8 \times 13^n[17]$
أي : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv (9+8) \times 13^n[17]$
أي : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv 17 \times 13^n[17]$
أي : $3^{2+4n} + 2^{3+6n} \equiv 0[17]$
إذن : العدد $3^{2+4n} + 2^{3+6n}$ مضاعف 17

التمرين ـ 25

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ يقبل القسمة على 29

الحـل ـ 25

$2^{5n+1} = 2 \times 2^{5n}$ إذن : $2^{5n+1} = 2 \times (32)^n$
$3^{n+3} = 3^3 \times 3^n$ إذن : $3^{n+3} = 27 \times 3^n$
$32 \equiv 3[29]$ إذن : $32^n \equiv 3^n[29]$
منه : $2 \times 32^n \equiv 2 \times 3^n[29]$ ....(1)
من جهة أخرى : $27 \times 3^n \equiv 27 \times 3^n[29]$ ....(2)
بجمع (1) و (2) : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 2 \times 3^n + 27 \times 3^n[29]$
أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv (2+27) \times 3^n[29]$
أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 29 \times 3^n[29]$
أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 0[29]$
منه العدد $3^{n+3} + 2^{1+5n}$ يقبل القسمة على 29

التمرين ـ 26

n عدد طبيعي كيفي .
1 ـ عين تبعا لقيم n باقي قسمة n^2 على 4
2 ـ برهن أن إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن $n^2 \equiv 1[8]$

الحـل ـ 26

ـ 1

$n \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$n^2 \equiv ?[4]$	0	1	0	1

2 ـ ليكن n عدد طبيعي فردي إذن : $n = 2k+1$ حيث $k \in IN$
لندرس بواقي قسمة $(2k+1)^2$ على 8 حسب قيم k

$k \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$2k \equiv ?[8]$	0	2	4	6	0	2	4	6
$2k+1 \equiv ?[8]$	1	3	5	7	1	3	5	7
$(2k+1)^2 \equiv ?[8]$	1	1	1	1	1	1	1	1

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي k فإن $(2k+1)^2 \equiv 1[8]$

إذن : من أجل كل عدد فردي n فإن $n^2 \equiv 1[8]$

<u>التمرين ـ 27</u>

1 ـ برهن أن إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن $n^4 \equiv 1[16]$

2 ـ برهن أن إذا كان العدد الطبيعي n ليس مضاعفا لـ 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1

<u>الحـل ـ 27</u>

1 ـ بواقي قسمة n^4 على 16 حسب قيم n

$n \equiv ?[16]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n^4 \equiv ?[16]$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

نتيجة : إذا كان n فردي فإن $n^4 \equiv 1[16]$

2 ـ لندرس بواقي قسمة n^4 على 5 حسب قيم n

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$n^4 \equiv ?[5]$	0	1	1	1	1

نتيجة : إذا كان n لا يوافق 0 بترديد 5 فإن $n^4 \equiv 1[5]$

أي إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1

<u>التمرين ـ 28</u>

1 ـ x عدد صحيح . أكمل الجدول التالي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$					

2 ـ إستنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث $2x \equiv 3[5]$

<u>الحـل ـ 28</u>

1 ـ

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$	0	2	4	1	3

2 ـ يكون $2x \equiv 3[5]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 4[5]$ أي $x = 5k+4$ حيث $k \in Z$

مثلا : من أجل $k = -3$: $x = -11$ إذن : $2x = -22$ و $-22 \equiv 3[5]$

من أجل $k = 2$: $x = 14$ إذن : $2x = 28$ و $28 \equiv 3[5]$

<u>التمرين ـ 29</u>

عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $n^3 + n - 2$ قابلا للقسمة على 7

<u>الحـل ـ 29</u>

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$n^3 + n \equiv ?[7]$	0	2	3	2	5	4	5
$n^3 + n - 2 \equiv ?[7]$	5	0	1	0	3	2	3

نتيجة : يكون $n^3 + n - 2$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $n^3 + n - 2 \equiv 0[7]$

أي $n \equiv 1[7]$ أو $n \equiv 3[7]$

منه قيم n المطلوبة هي $n = 7k+1$ أو $n = 7k+3$ حيث $k \in N$

<u>التمرين ـ 30</u>

من أجل كل عدد طبيعي n نضع R_n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9

1 ـ أتمم الجدول التالي :

n	0	1	2	3	4	5	6
R_n							

2 ـ إستنتج R_n من أجل كل عدد طبيعي n
3 ـ عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 65^n على 9
4 ـ إستنتج باقي قسمة العدد 65^{2011} على 9

الحـل ـ 30

ـ 1

n	0	1	2	3	4	5	6
R_n	1	2	4	8	7	5	1

2 ـ إذا كان $n = 6k$ فإن $R_n = 1$
إذا كان $n = 6k + 1$ فإن $R_n = 2$
إذا كان $n = 6k + 2$ فإن $R_n = 4$
إذا كان $n = 6k + 3$ فإن $R_n = 8$
إذا كان $n = 6k + 4$ فإن $R_n = 7$
إذا كان $n = 6k + 5$ فإن $R_n = 5$

3 ـ $65 \equiv 2[9]$ إذن : $65^n \equiv 2^n[9]$
إذن : بواقي قسمة 65^n على 9 هي نفسها بواقي قسمة 2^n على 9
حسب الجدول التالي :

n	6 k	6 k + 1	6 k + 2	6 k + 3	6 k + 4	6 k + 5
باقي قسمة 65^n على 9	1	2	4	8	7	5

4 ـ $2011 = 6(335) + 1$ إذن : $2011 = 6k + 1$
منه : باقي قسمة 65^{2011} على 9 هو 2

التمرين ـ 31

1 ـ أوجد باقي قسمة العدد 4^5 على 11
2 ـ إستنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد 37^k ؛ 37^{5k+1} ؛ 37^{5k+2} ؛ 37^{5k+3} و 37^{5k+4} حيث $k \in N$

الحـل ـ 31

ـ 1

$4^0 \equiv 1[11]$ $4^{5k} \equiv 1[11]$
$4^1 \equiv 4[11]$ $4^{5k+1} \equiv 4[11]$
$4^2 \equiv 5[11]$ منه $4^{5k+2} \equiv 5[11]$
$4^3 \equiv 9[11]$ $4^{5k+3} \equiv 9[11]$
$4^4 \equiv 3[11]$ $4^{5k+4} \equiv 3[11]$
$4^5 \equiv 1[11]$ و هو المطلوب

2 ـ $37 \equiv 4[11]$ إذن : $37^n \equiv 4^n[11]$ حيث $n \in IN$
إذن : بواقي قسمة 37^n على 11 هي نفسها بواقي قسمة 4^n على 11
منه الجدول التالي :

n =	5 k	5 k + 1	5 k + 2	5 k + 3	5 k + 4
باقي قسمة 37^n على 11	1	4	5	9	3

التمرين ـ 32

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $2x = 3y$

الحـل ـ 32

إذا كان $(x ; y)$ حل للمعادلة $2x = 3y$ فإن $2x - 3y = 0$ أي $2x \equiv 0[3]$
لنبحث إذن عن قيم x كمايلي :

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$2x \equiv ?[3]$	0	2	1

إذن : يكون $2x \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 0[3]$ أي $x = 3k$ حيث $k \in Z$
نعوض x بـــ 3 k في المعادلة نحصل على : $2(3k) = 3y$
منه : $y = 2k$

نتيجة : حلول المعادلة $2x = 3y$ في Z هي كل الثنائيات $(3k ; 2k)$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 33

حل في Z^2 المعادلة ذات المجهول $(x ; y)$ التالية : $2x - 5y = 1$ .... (1)

الحــل ــ 33

المعادلة (1) تكافئ $2x = 5y + 1$

إذن : إذا كان $(x ; y)$ حلا المعادلة (1) فإن $2x \equiv 1[5]$

لنبحث إذن عن قيم x كمايلي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$	0	2	4	1	3

نتيجة : يكون $2x \equiv 1[5]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 3[5]$ أي $x = 5k + 3$ حيث $k \in Z$

نعوض x بـ $5k + 3$ في المعادلة (1) نحصل على :

$2(5k + 3) - 5y = 1$

أي : $10k + 6 - 1 = 5y$

أي : $10k + 5 = 5y$

أي : $y = 2k + 1$

خلاصة : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $(5k + 3 ; 2k + 1)$ حيث $k \in Z$

مثلا : من أجل $k = 1$: $(8 ; 3)$ حل للمعادلة (1) .

التمرين ــ 34

حل في Z الجمل التالية :

1 ـ $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$ **2 ـ** $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

الحــل ــ 34

1 ـ $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x = 6k + 1 \ (k \in Z) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6k + 1 \equiv 3[5] \\ x = 6k + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6k \equiv 2[5] \\ x = 6k + 1 \end{cases}$

لنبحث عن قيم k حتى يكون $6k \equiv 2[5]$ كمايلي :

$k \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$6k \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4

نتيجة : يكون $6k \equiv 2[5]$ إذا و فقط إذا كان $k \equiv 2[5]$ أي $k = 5n + 2$ حيث $n \in Z$

إذن : $x = 6(5n + 2) + 1$

أي : $x = 30n + 13$ و هي حلول الجملة المطلوبة حيث $n \in Z$

2 ـ $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[2] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 : k \in Z \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ 4(2k + 1) \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ 8k + 4 \equiv 1[3] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ 8k \equiv 0[3] \end{cases}$$

لنبحث عن قيم k حتى يكون $8k \equiv 0[3]$ كمايلي :

$k \equiv ?[3]$	0	1	2
$8k \equiv ?[3]$	0	2	1

إذن : يكون $8k \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $k \equiv 0[3]$ أي $k = 3n$ حيث $n \in Z$

نتيجة : $x = 2(3n) + 1$ أي $x = 6n + 1$ هي حلول الجملة المطلوبة . حيث $n \in Z$

التمرين ــ 35

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس العشري

$a = 12734$ ؛ $b = 5723$ ؛ $c = 503019$

الحـل ــ 35

1 ــ $12734 = 4 + 3 \times 10 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 1 \times 10^4$

2 ــ $5723 = 3 + 2 \times 10 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^3$

3 ــ $503019 = 9 + 1 \times 10 + 0 \times 10^2 + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^4 + 5 \times 10^5$

التمرين ــ 36

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6

$a = \overline{234}$ ؛ $b = \overline{1523}$ ؛ $c = \overline{503012}$

الحـل ــ 36

1 ــ $\overline{234} = 4 + 3 \times 6 + 2 \times 6^2$

2 ــ $\overline{1523} = 3 + 2 \times 6 + 5 \times 6^2 + 1 \times 6^3$

3 ــ $\overline{503012} = 2 + 1 \times 6 + 0 \times 6^2 + 3 \times 6^3 + 0 \times 6^4 + 5 \times 6^5$

التمرين ــ 37

أكتب في النظام ذو الأساس 7 الأعداد التالية :

1 ــ $a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$

2 ــ $b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7$

3 ــ $c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1$

الحـل ــ 37

1 ــ $a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = \overline{1235}$

2 ــ $b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7 = \overline{520}$

3 ــ $c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1 = \overline{6021}$

التمرين ــ 38

a عدد طبيعي حيث $a \geq 5$

نضع $N = 4a^5 + 2a^3 + a + 3$

أكتب العدد N في النظام ذو الأساس a

الحـل ــ 38

$a \geq 5$ إذن : كل من الأعداد 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

إذن :

$$N = 4a^5 + 2a^3 + a + 3$$
$$= 4a^5 + 0 \times a^4 + 2 \times a^3 + 0 \times a^2 + a + 3$$
$$= \overline{402013}$$ في النظام ذو الأساس a

التمرين ــ 39

العددان 2306 و 1035 مكتوبان في النظام ذو الأساس x

1 ــ ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد x

2 ــ أنشر العددين وفق الأساس x

الحـل ـــ 39

1 ــ أكبر رقم يحتوي عليه العددان هو الرقم 6 إذن : أصغر قيمة للأساس x هي $x = 7$

2 ــ من أجل $x \geq 7$ فإن : $\overline{2306} = 6 + 0 \times x + 3x^2 + 2x^3$

$$\overline{1035} = 5 + 3x + 0 \times x^2 + x^3$$

التمرين ـــ 40

إليك الأعداد 2 ؛ 4 ؛ 7 ؛ 33 مكتوبة في النظام العشري .
أعد كتابتها في النظام الثنائي .

الحـل ـــ 40

$2 = 0 + 2^1$ إذن : $2 = \overline{10}$

$4 = 0 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2$ إذن : $4 = \overline{100}$

$7 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2$ إذن : $7 = \overline{111}$

$33 = 1 + 0 \times 2 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$ إذن : $33 = \overline{100001}$

التمرين ـــ 41

n عدد طبيعي يكتب في النظام الثنائي $\overline{1101101}$
ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كمايلي $\overline{214}$

الحـل ـــ 41

لنبحث عن n في النظام العشري :

$$\begin{aligned}\overline{1101101} &= 1 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 \\ &= 1 + 4 + 8 + 32 + 64 \\ &= 109\end{aligned}$$

ليكن n مكتوب من الشكل $\overline{214}$ في النظام x حيث $x \geq 5$

إذن : $\overline{214} = 4 + x + 2x^2$

نتيجة : $4 + x + 2x^2 = 109$

أي : $2x^2 + x - 105 = 0$ هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول الطبيعي x حيث $x \geq 5$

$$\Delta = 1 + 840 = (29)^2$$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1-29}{4} = \dfrac{-15}{2} \text{ مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{-1+29}{4} = 7 \end{array}\right.$

إذن : العدد n يكتب من الشكل $\overline{214}$ في النظام ذو الأساس 7

التمرين ـــ 42

ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه : $\overline{2003} = \overline{21} \times \overline{43}$

الحـل ـــ 42

ليكن x أساس التعداد المطلوب . حيث $x \in IN$ و $x \geq 5$

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{2003} = 3 + 0x + 0x^2 + 2x^3 = 2x^3 + 3 \\ \overline{21} \times \overline{43} = (1 + 2x)(3 + 4x) = 8x^2 + 10x + 3 \end{array}\right.$$

أي : $2x^3 + 3 = 8x^2 + 10x + 3$

$$2x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

منه : $x^2 - 4x - 5 = 0$ لأن $x \geq 5$ أي $x \neq 0$

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4-6}{2} = -1 \text{ مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{4+6}{2} = 5 \text{ مقبول} \end{array}\right.$

إذن : يكون $\overline{2003} = \overline{21} \times \overline{43}$ في النظام ذو الأساس 5

التمرين ــ 43

في كل حالة من الحالات التالية أوجد أساس التعداد الذي تكون فيه المساواة محققة :

1 ــ $\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$

2 ــ $\overline{21} \times \overline{14} = \overline{324}$

الحــل ــ 43

1 ــ $\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$ ليكن x أساس التعداد إذن $x \geq 6$

$$\overline{411} = 1 + x + 4x^2$$

$$\overline{15} \times \overline{23} = (5 + x)(3 + 2x) = 2x^2 + 13x + 15$$

منه : $4x^2 + x + 1 = 2x^2 + 13x + 15$

أي : $2x^2 - 12x - 14 = 0$

$$\Delta = 144 + 112 = 256 = (16)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{12 - 16}{4} = -1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{12 + 16}{4} = 7 \end{cases}$$

نتيجة : المساواة $\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$ محققة في النظام ذي الأساس 7

2 ــ $\overline{21} \times \overline{14} = \overline{324}$ ليكن x أساس التعداد إذن : $x \geq 5$

$$\overline{21} \times \overline{14} = (2x + 1)(x + 4) = 2x^2 + 9x + 4$$

$$\overline{324} = 3x^2 + 2x + 4$$

منه : $3x^2 + 2x + 4 = 2x^2 + 9x + 4$

أي : $x^2 - 7x = 0$

أي : $x(x - 7) = 0$

أي : $\begin{cases} x = 0 & \text{مرفوض} \\ \text{أو} \\ x = 7 \end{cases}$

نتيجة : المساواة $\overline{21} \times \overline{14} = \overline{324}$ محققة في النظام ذو الأساس 7

التمرين ــ 44

في أي أساس تعداد x يكون $\overline{162} = \overline{77} + \overline{63}$ ؟ أحسب $\overline{77} \times \overline{63}$ في النظام العشري ثم في النظام ذو الأساس 8

الحــل ــ 44

ليكن x أساس التعداد . إذن $x \geq 8$ $\qquad \overline{162} = x^2 + 6x + 2$

$$\overline{77} + \overline{63} = 7x + 7 + 6x + 3 = 13x + 10$$

إذن : $x^2 + 6x + 2 = 13x + 10$

أي : $x^2 - 7x - 8 = 0$

$$\Delta = 49 + 32 = 81$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - 9}{2} = -1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{7 + 9}{2} = 8 \end{cases}$$

نتيجة : أساس التعداد هو $x = 8$

منه : $\overline{77} = 7 \times 8 + 7 = 56 + 7 = 63$

$$\overline{63} = 6 \times 8 + 3 = 48 + 3 = 51$$

إذن : $\overline{77} \times \overline{63} = 63 \times 51 = 3213$

منه : العدد $\overline{77} \times \overline{63}$ يكتب 3213 في النظام العشري .

حساب العدد $\overline{77} \times \overline{63}$ في النظام ذو الأساس 8

الطريقة الأولى : إجراء عملية الضرب عموديا كمايلي :

الخطوات	العملية
$3 \times 7 = 21 = 2 \times 8 + 5 = \overline{25}$ نكتب 5 و نحتفظ بـــ 2	77×63 الاحتفاظ 2 5
$3 \times 7 = 21$ $21 +$ الاحتفاظ $= 21 + 2 = 23$ $23 = 2 \times 8 + 7 = \overline{27}$ نكتب 27 دون إحتفاظ	77 63 275
نضع نقطة و نكمل العملية $6 \times 7 = 42 = 5 \times 8 + 2 = \overline{52}$ نكتب 2 و نحتفظ بـــ 5	77 63 الاحتفاظ 5 275 $2\,.$
$6 \times 7 = 42$ $42 +$ الاحتفاظ $= 42 + 5 = 47$ $47 = 5 \times 8 + 7 = \overline{57}$ نكتب 57 دون إحتفاظ	77 63 275 $572\,.$
$5 + 0 = 5$ $7 + 2 = 9 = 1 \times 8 + 1 = \overline{11}$ نكتب 1 و نحتفظ بـــ 1	77 63 الاحتفاظ 1 $\oplus\ 275$ $572\,.$ 15
$2 + 7 = 9$ $9 +$ الاحتفاظ $= 9 + 1 = 10$ $10 = 1 \times 8 + 2 = \overline{12}$ نكتب 2 و نحتفظ بـــ 1	77 63 الاحتفاظ 1 $\oplus\ 275$ $572\,.$ 215
$0 + 5 = 5$ $5 +$ الاحتفاظ $= 5 + 1 = 6$ نكتب 6 (دون إحتفاظ)	77 63 $\oplus\ 275$ $572\,.$ 6215

نتيجة : $\overline{77} \times \overline{63} = \overline{6215}$

تحقيق : $\overline{6215} = 6 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 1 \times 8 + 5$

$= 3072 + 128 + 8 + 5$

$= 3213$

$\overline{77} \times \overline{63} = 3213$

الطريقة الثانية : لدينا في النظام العشري $\overline{77} \times \overline{63} = 3213$

إذن : باجراء عمليات القسمة على 8 نحصل على مايلي :

$3213 \div 8$: الباقي $\boxed{5}$ و حاصل القسمة 401

$401 \div 8$: الباقي $\boxed{1}$ و حاصل القسمة 50

$50 \div 8$: الباقي $\boxed{2}$ و حاصل القسمة 6

$6 \div 8$: الباقي $\boxed{6}$ و حاصل القسمة 0

نتيجة : $3213 = \overline{6215}$ في النظام ذو الأساس 8

إذن : $\overline{77} \times \overline{63} = \overline{6215}$

التمرين ــ 45

عين فيمايلي أساس النظام الذي تكون فيه المساواة محققة :

1 ــ $\overline{12} \times \overline{23} = \overline{276}$

2 ــ $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$

الحل ــ 45

1 ــ $\overline{12} \times \overline{23} = \overline{276}$ ليكن x أساس النظام حيث $x \geq 8$

$\overline{12} \times \overline{23} = (x + 2)(2x + 3) = 2x^2 + 7x + 6$

$\overline{276} = 2x^2 + 7x + 6$

إذن : $2x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 7x + 6$

بما أن المعادلة محققة دائما فإن قيم x الممكنة هي كل الأعداد الطبيعية الأكبر أو تساوي 8

2 ــ $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$ ليكن x أساس النظام حيث $x \geq 6$

$\overline{541} = 5x^2 + 4x + 1$

$\overline{22} \times \overline{32} = (2x + 2)(3x + 2) = 6x^2 + 10x + 4$

إذن : $5x^2 + 4x + 1 = 6x^2 + 10x + 4$

أي : $x^2 + 6x + 3 = 0$

$\Delta = 36 - 12 = 24$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{24}}{2} & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{24}}{2} & \text{مرفوض} \end{cases}$$

نتيجة : لا يوجد أي أساس نظام تكون فيه المساواة $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$ محققة .

التمرين ــ 46

أكتب في النظام الثنائي العددين 10 و 100 المكتوبين في النظام العشري

الحل ــ 46

بإجراء عمليات القسمة المتتالية كمايلي :

$$\begin{array}{l} 100 = 2 \times 50 + \boxed{0} \\ 50 = 2 \times 25 + \boxed{0} \\ 25 = 2 \times 12 + \boxed{1} \\ 12 = 2 \times 6 + \boxed{0} \\ 6 = 2 \times 3 + \boxed{0} \\ 3 = 2 \times 1 + \boxed{1} \\ 1 = 2 \times 0 + \boxed{1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 = 2 \times 5 + \boxed{0} \\ 5 = 2 \times 2 + \boxed{1} \\ 2 = 2 \times 1 + \boxed{0} \\ 1 = 2 \times 0 + \boxed{1} \end{array}$$

إذن : $100 = \overline{1100100}$ ، إذن : $10 = \overline{1010}$

التمرين ــ 47

1 ــ في أي أساس تعداد يكون $\overline{51} = \overline{13} + \overline{35}$ ....(1)

2 ــ أكتب المساواة (1) في النظام الثنائي .

الحل ــ 47

1 ــ $\overline{51} = \overline{13} + \overline{35}$ ليكن x أساس التعداد حيث $x \geq 6$

$\overline{51} = 5x + 1$

$\overline{13} + \overline{35} = x + 3 + 3x + 5 = 4x + 8$

إذن : $5x + 1 = 4x + 8$

أي : $x = 7$

نتيجة : نظام التعداد هو 7

2ــ

$\overline{51} = 5 \times 7 + 1 = 36$

$\overline{13} = 1 \times 7 + 3 = 10$

$\overline{35} = 3 \times 7 + 5 = 26$

لنحول الأعداد 36 ؛ 10 ، 26 إلى النظام الثنائي كمايلي :

36 | 2 → 0 | 18 → 0 | 9 → 1 | 4 → 0 | 2 → 0 | 1 → 1 | 0

10 | 2 → 0 | 5 → 1 | 2 → 0 | 1 → 1 | 0

26 | 2 → 0 | 13 → 1 | 6 → 0 | 3 → 1 | 1 → 1 | 0

$36 = \overline{100100}$ $\qquad 10 = \overline{1010}$ $\qquad 26 = \overline{11010}$

إذن : المساواة (1) تكتب في النظام الثنائي : $\overline{100100} = \overline{1010} + \overline{11010}$

التمرين ــ 48

ليكن n عدد طبيعي يكتب في النظام العشري 72881

أكتب n في النظام ذو الأساس 12 ثم في النظام ذو الأساس 7

الحــل ــ 48

1 ــ الكتابة في النظام ذو الأساس 12 :

72881 | 12 → 6073 (الباقي 5)

6073 | 12 → 506 (الباقي 1)

506 | 12 → 42 (الباقي 2)

42 | 12 → 3 (الباقي 6)

3 | 12 → 0 (الباقي 3)

إذن : $72881 = \overline{36215}$

2 ــ الكتابة في النظام ذو الأساس 7

72881 | 7 → 10411 (الباقي 4)

10411 | 7 → 1487 (الباقي 2)

1487 | 7 → 212 (الباقي 3)

212 | 7 → 30 (الباقي 2)

30 | 7 → 4 (الباقي 2)

4 | 7 → 0 (الباقي 4)

إذن : $72881 = \overline{422324}$

التمرين ــ 49

أكتب في النظام العشري العدد $\overline{3752}$ المكتوب في النظام ذو الأساس 8

الحــل ــ 49

$$\overline{3752} = 3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8 + 2$$
$$= 1536 + 448 + 40 + 2$$
$$= 2026$$

التمرين ــ 50

أكتب في النظام ذو الأساس 12 العدد $\overline{6175}$ المكتوب في النظام ذو الأساس 9

الحــل ــ 50

نبحث أولا عن العدد مكتوبا في النظام العشري كمايلي :

$$\overline{6175} = 6 \times 9^3 + 1 \times 9^2 + 7 \times 9 + 5$$
$$= 4374 + 81 + 63 + 5$$
$$= 4523$$

لنبحث الآن عن كتابة العدد 4523 في النظام ذو الأساس 12

4523 | 12 → 376 (الباقي 11)

376 | 12 → 31 (الباقي 4)

31 | 12 → 2 (الباقي 7)

2 | 12 → 0 (الباقي 2)

لاحظ أن 11 هو رقم في النظام ذو الأساس 12

إذن نرمز له بالرمز β

منه : $4523 = \overline{274\beta}$

التمرين ــ 51

أكتب في النظام ذو الأساس 7 العددين $\overline{234}$ و $\overline{1040}$ المكتوبين في النظام ذو الأساس 5

الحـل ـ 51

أولا نبحث عن كتابة الأعداد في النظام العشري كمايلي :

$$234 = 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 50 + 15 + 4 = 69$$
$$1040 = 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5 + 0 = 125 + 20 = 145$$

ثانيا نجري عمليات القسمة المتتالية على 7 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 145 & 7 \\ 05 & 20 \;|\; 7 \\ \boxed{5} & \boxed{6} \;\; 2 \;|\; 7 \\ & \quad \boxed{2} \;\; 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 69 & 7 \\ \boxed{6} & 9 \;|\; 7 \\ & \boxed{2} \;\; 1 \;|\; 7 \\ & \quad \boxed{1} \;\; 0 \end{array}$$

إذن : $69 = \overline{126}$ و $145 = \overline{265}$

التمرين ـ 52

a عدد طبيعي حيث $a > 1$

أكتب a ، a^2 ، a^3 في النظام ذو الأساس a

الحـل ـ 52

من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 1$ لدينا :

$a = 1 \times a + 0$ إذن : $a = \overline{10}$

$a^2 = 1 \times a^2 + 0 \times a + 0$ إذن : $a^2 = \overline{100}$

$a^3 = 1 \times a^3 + 0 \times a^2 + 0 \times a + 0$ إذن : $a^3 = \overline{1000}$

التمرين ـ 53

في النظام العشري A عدد طبيعي أكبر تماما من 2 و S مجموع أرقامه .

أثبت أن A يقبل القسمة على 3 إذا و فقط إذا كان S يقبل القسمة على 3

الحـل ـ 53

ليكن $A = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots\ldots a_1\, a_0$ كتابة العدد A في النظام العشري .

إذن : $\begin{cases} A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_1 \times 10 + a_0 \\ S = a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 + a_0 \end{cases}$

لدينا $10 \equiv 1[3]$ إذن : $10^k \equiv 1^k[3]$ حيث $k \in IN$

أي $10^k \equiv 1[3]$

منه : $\begin{cases} 10^n \equiv 1[3] \\ 10^{n-1} \equiv 1[3] \\ \vdots \\ 10 \equiv 1[3] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} a_n \times 10^n \equiv a_n[3] \\ a_{n-1} \times 10^{n-1} \equiv a_{n-1}[3] \\ \vdots \\ a_1 \times 10 \equiv a_1[3] \end{cases}$

منه : $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \times 10 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_1[3]$

إذن : $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_1 + a_0[3]$

أي : $A \equiv S[3]$

نتيجة : يكون $A \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $S \equiv 0[3]$

أي يكون a قابلا للقسمة على 3 إذا و فقط إذا كان S قابلا للقسمة على 3

التمرين ـ 54

x و y عددان طبيعيان يكتبان في النظام العشري بنفس الأرقام لكن في ترتيبين متعاكسين .

برهن أن الفرق x - y مضاعف للعدد 9

الحـل ـ 54

ليكن $x = a_n\, a_{n-1} \ldots\ldots a_1\, a_0$

إذن : $y = a_0\, a_1 \ldots\ldots a_{n-1}\, a_n$

منه : $\begin{cases} x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_1 \times 10 + a_0 \\ y = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_{n-1} \times 10 + a_n \end{cases}$

إذن : $x - y = (a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + ... + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 + (a_0 - a_n)$

لكن $10 \equiv 1[9]$ إذن : $10^k \equiv 1[9]$ من أجل كل عدد طبيعي k

منه : $\begin{cases} 10^n \equiv 1[9] \\ 10^{n-1} \equiv 1[9] \\ \vdots \\ 10 \equiv 1[9] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (a_n - a_0) \times 10^n \equiv a_n - a_0[9] \\ (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} \equiv a_{n-1} - a_1[9] \\ \vdots \\ (a_1 - a_{n-1}) \times 10 \equiv a_1 - a_{n-1}[9] \end{cases}$

منه :

$(1) .... (a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + ... + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 \equiv (a_n - a_0) + (a_{n-1} - a_1) + ... + (a_1 - a_{n-1})[9]$

من جهة أخرى $a_0 - a_n \equiv a_0 - a_n[9]$

إذن بالجمع مع العبارة (1) نحصل على :

$(a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + ... + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 + (a_0 - a_n) \equiv (a_n - a_0) + (a_{n-1} - a_1) + .. + (a_1 - a_{n-1}) + (a_0 - a_n)$

أي : $x - y \equiv a_n - a_0 + a_{n-1} - a_1 + ...+ a_1 - a_{n-1} + a_0 - a_n[9]$

أي : $x - y \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) - (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n)[9]$

أي : $x - y \equiv 0[9]$

أي : $x - y$ يقبل القسمة على 9

<u>التمرين ـــ 55</u>

إملأ الجدول التالي الذي يمثل جدول الجمع في النظام ذو الأساس 4 ثم أنجز العملية التالية : $\overline{3223} + \overline{132}$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$				
$\overline{1}$				
$\overline{2}$				
$\overline{3}$				

مثلا : $\overline{3} + \overline{3} = \overline{12}$

لأن : $3 + 3 = 6 = 1 \times 4 + 2$

<u>الحــل ـــ 55</u>

1 ـــ

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

2 ـــ لننجز العملية $\overline{3223} + \overline{132}$ عموديا :

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ 3\,2\,2\,3 \\ +\quad 1\,3\,2 \\ \hline 1\,0\,0\,2\,1 \end{array}$$

نتيجة : $\overline{3223} + \overline{132} = \overline{10021}$

<u>التمرين ـــ 56</u>

أنجز جدول الضرب في النظام ذو الأساس 4 ثم أنجز العملية التالية : $\overline{3223} \times \overline{123}$

الحـل ــ 56

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$

منه العملية التالية :

$$\begin{array}{rr} \text{الإحتفاظ الثاني} \longrightarrow & 1\,1\,1 \\ \text{الإحتفاظ الأول} \longrightarrow & 2\,2\,2 \\ \hline & 3\,2\,2\,3 \\ \otimes & 1\,2\,3 \\ \hline & 2\,3\,0\,0\,1 \\ \oplus & 1\,3\,1\,1\,2\,. \\ \oplus & 3\,2\,2\,3\,.\,. \\ \hline & 1\,2\,0\,3\,0\,2\,1 \end{array}$$

$8 = 2 \times 4 + 0 = \overline{20}$

$11 = 2 \times 4 + 3 = \overline{23}$

$7 = 1 \times 4 + 3 = \overline{13}$

$6 = 1 \times 4 + 2 = \overline{12}$

نتيجة : $\overline{3223} \times \overline{123} = \overline{1203021}$

التمرين ــ 57

أنجز العمليات التالية في النظام ذو الأساس 5 :

$$\begin{array}{r} 3\,4\,2\,1 \\ +\;\;2\,3\,0 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,3\,1 \\ -\,1\,3\,2 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,1\,3 \\ \times\;\;1\,4 \\ \hline = \end{array}$$

الحـل ــ 57

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1}\;\;\;\;\; \\ 3\,4\,2\,1 \\ +\;\;2\,3\,0 \\ \hline =4\,2\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,3\,1 \\ -\,1\,3\,2 \\ \hline =2\,4\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1\;2}\;\; \\ 2\,1\,3 \\ \times\;\;\;1\,4 \\ \hline 1\,4\,1\,2 \\ 2\,1\,3\,. \\ \hline =4\,0\,4\,2 \end{array}$$

التمرين ــ 58

أنجز في النظام ذو الأساس 12 العمليات التالية حيث α هو رمز 10 و β هو رمز 11

$$\begin{array}{r} 3\,9\,\beta\,7 \\ +\;\;2\,1\,3 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,0\,0\,\alpha \\ -\;3\,9\,\beta\,7 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,7 \\ \times\;4\,1 \\ \hline = \end{array}$$

الحـل ــ 58

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1}\;\;\;\;\; \\ 3\,9\,\beta\,7 \\ +\;\;2\,1\,3 \\ \hline =4\,0\,0\,\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,0\,0\,\alpha \\ -\;3\,9\,\beta\,7 \\ \hline =0\,2\,1\,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{2}\;\;\; \\ 2\,7 \\ \times\;\;4\,1 \\ \hline 2\,7 \\ \alpha\,4\,. \\ \hline =\alpha\,6\,7 \end{array}$$

التمرين ــ 59

1 ــ عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10

2 ــ إستنتج حسب قيم n رقم آحاد العدد 2^n

3 ــ عين رقم آحاد العدد $(3548)^9 \times (2534)^{31}$

الحـل ــ 59

1 ــ

$2^0 \equiv 1[10]$
$2^1 \equiv 2[10]$
$2^2 \equiv 4[10]$
$2^3 \equiv 8[10]$
$2^4 \equiv 6[10]$
$2^5 \equiv 2[10]$
$2^6 \equiv 4[10]$
$2^7 \equiv 8[10]$
$2^8 \equiv 6[10]$

منه

إذا كان $n = 0$ فإن $2^0 \equiv 1[10]$
إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $2^n \equiv 2[10]$ $(k \in IN)$
إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $2^n \equiv 4[10]$ $(k \in IN)$
إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $2^n \equiv 8[10]$ $(k \in IN)$
إذا كان $n = 4k$ فإن $2^n \equiv 6[10]$ $(k \in IN^*)$

2 ــ حسب السؤال الأول فإن :
إذا كان $n = 0$ فإن رقم آحاد 2^n هو 1
إذا كان $n = 4k + 1$ حيث $k \in IN$ فإن رقم آحاد 2^n هو 2
إذا كان $n = 4k + 2$ حيث $k \in IN$ فإن رقم آحاد 2^n هو 4
إذا كان $n = 4k + 3$ حيث $k \in IN$ فإن رقم آحاد 2^n هو 8
إذا كان $n = 4k$ حيث $k \in IN^*$ فإن رقم آحاد 2^n هو 6

3 ــ $\begin{cases} 2534 \equiv 4[10] \\ 3548 \equiv 8[10] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2534 \equiv 2^2[10] \\ 3548 \equiv 2^3[10] \end{cases}$

منه $\begin{cases} (2534)^{31} \equiv 2^{2\times 31}[10] \\ (3548)^9 \equiv 2^{3\times 9}[10] \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2534^{31} \equiv 2^{62}[10] \\ 3548^9 \equiv 2^{27}[10] \end{cases}$

لكن $\begin{cases} 62 = 4 \times 15 + 2 \\ 27 = 4 \times 6 + 3 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 2^{62} \equiv 4[10] \\ 2^{27} \equiv 8[10] \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 2534^{31} \equiv 4[10] \\ 3548^9 \equiv 8[10] \end{cases}$ إذن : $2534^{31} \times 3548^9 \equiv 8 \times 4[10]$
أي $2534^{31} \times 3548^9 \equiv 2[10]$

نتيجة : رقم آحاد العدد $2534^{31} \times 3548^9$ هو 2

التمرين ــ 60

ماهما الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008}

الحـل ــ 60

لإيجاد الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} يكفي إيجاد باقي قسمته على 100
إذن لندرس بواقي قسمة 51^n على 100 كمايلي :

$51^0 \equiv 1[100]$
$51^1 \equiv 51[100]$
$51^2 \equiv 1[100]$
$51^3 \equiv 51[100]$

منه : $\begin{cases} \text{إذا كان } n = 2k \text{ فإن } 51^n \equiv 1[100] \\ \text{إذا كان } n = 2k+1 \text{ فإن } 51^n \equiv 51[100] \end{cases}$

نتيجة : $2008 = 2(1004)$ إذن : $51^{2008} \equiv 1[100]$
منه : الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} هما 01 (الآحاد هو 1 و العشرات هو 0)

التمرين ــ 61

x ، y عددان صحيحان .
برهن أن العدد $x\,y(x^2 - y^2)$ مضاعف العدد 3

الحـل ــ 61

نضع $A = x\,y(x^2 - y^2)$ إذن : $A = x\,y(x+y)(x-y)$
إذا كان x مضاعف 3 أو y مضاعف 3 فإن A مضاعف 3

إذن يكفي أن نبرهن أن A مضاعف 3 من أجل x و y ليسا من مضاعفات 3 كمايلي :

$x = 3k + 1$ $k \in Z$	$y = 3n + 1$ $n \in Z$	$x - y = 3k - 3n = 3(k - n)$ إذن : x - y مضاعف 3 منه A مضاعف 3
	$y = 3n + 2$ $n \in Z$	$x + y = 3k + 1 + 3n + 2 = 3(k + n + 1)$ إذن : x + y مضاعف 3 منه A مضاعف 3
$x = 3k + 2$ $k \in Z$	$y = 3n + 1$ $n \in Z$	$x + y = 3k + 2 + 3n + 1 = 3(k + n + 1)$ إذن : x + y مضاعف 3 منه A مضاعف 3
	$y = 3n + 2$ $n \in Z$	$x - y = 3k - 3n = 3(k - n)$ إذن : x - y مضاعف 3 منه A مضاعف 3

نتيجة : من أجل كل عددين صحيحين x ، y فإن $x\,y(x^2 - y^2)$ مضاعف 3

التمرين ـ 62

أوجد كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ قابلا للقسمة على 8

الحـل ـ 62

$n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ قابل القسمة على 8 يكافئ $n^3 + 3n^2 + 3n - 7 \equiv 0[8]$

يكافئ $n^3 + 3n^2 + 3n \equiv 7[8]$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$n^3 \equiv ?[8]$	0	1	0	3	0	5	0	7
$3n^2 \equiv ?[8]$	0	3	4	3	0	3	4	3
$3n \equiv ?[8]$	0	3	6	1	4	7	2	5
$n^3 + 3n^2 + 3n \equiv ?[8]$	0	7	2	7	4	7	6	7

نتيجة : $n^3 + 3n^2 + 3n \equiv 7[8]$ يكافئ $n \equiv 1[8]$ أو $n \equiv 3[8]$ أو $n \equiv 5[8]$ أو $n \equiv 7[8]$

إذن قيم n المطلوبة هي كل الأعداد الطبيعية n التي تكتب على أحد الأشكال التالية

$n = 8k + 1$ ، $n = 8k + 3$ ، $n = 8k + 5$ ، $n = 8k + 7$ حيث k عدد طبيعي

مثلا : من أجل $k = 1$: $8(1) + 1 = 9$ إذن : $9^3 + 3(9)^2 + 3(9) - 7 = 729 + 243 + 27 - 7$

$= 992$

$= 8(124)$

التمرين ـ 63

1 ـ كيف يمكن إختيار العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $A = 2^n - 1$ قابلا للقسمة على 9

2 ـ نفرض أن n يحقق الشرط المعين في السؤال (1) . برهن أن A يقبل القسمة على 7

ثم إستنتج باقي قسمة A على 21

الحـل ـ 63

1 ـ A قابل للقسمة على 9 يكافئ $A \equiv 0[9]$

يكافئ $2^n - 1 \equiv 0[9]$

يكافئ $2^n \equiv 1[9]$

نبحث عن بواقي قسمة 2^n على 9 كمايلي :

$2^0 \equiv 1[9]$
$2^1 \equiv 2[9]$
$2^2 \equiv 4[9]$
$2^3 \equiv 8[9]$
$2^4 \equiv 7[9]$
$2^5 \equiv 5[9]$
$2^6 \equiv 1[9]$

نتيجة : إذا كان $n = 6k$ حيث $k \in IN$ فإن $2^n \equiv 1[9]$

منه : يكون $2^n - 1$ قابلا للقسمة على 9 إذا و فقط إذا كان $n = 6k$ حيث $k \in IN$

2 ـ ليكن $n = 6k$ حيث $k \in IN$

إذن : $A = 2^{6k} - 1 = 64^k - 1$

لدينا $64 \equiv 1[7]$ إذن : $64^k \equiv 1^k[7]$

أي $64^k \equiv 1[7]$

منه $64^k - 1 \equiv 0[7]$

أي $A \equiv 0[7]$

أي A يقبل القسمة على 7 و هو المطلوب

نتيجة : A يقبل القسمة على 9 إذن A يقبل القسمة على 3 ؛ A يقبل القسمة على 7

إذن : A يقبل القسمة على 21 لأن $21 = 7 \times 3$

منه : باقي قسمة A على 21 هو 0

التمرين ـ 64

برهن أن إذا كان العدد الطبيعي n لا يقبل القسمة على 5 فإن العدد $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ يكون مضاعفا للعدد 5

الحـل ـ 64

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv ?[5]$	0	1	4	4	1
$n^2 - 1 \equiv ?[5]$	4	0	3	3	0
$n^2 - 4 \equiv ?[5]$	1	2	0	0	2
$(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv ?[5]$	4	0	0	0	0

نتيجة : إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن $(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv 0[5]$

أي إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ مضاعف لـ 5

التمرين ـ 65

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $n(2n + 1)(7n + 1)$ يقبل القسمة على 6

الحـل ـ 65

ـ 1

$n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2n \equiv ?[6]$	0	2	4	0	2	4
$7n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2n + 1 \equiv ?[6]$	1	3	5	1	3	5
$7n + 1 \equiv ?[6]$	1	2	3	4	5	0
$n(2n + 1)(7n + 1) \equiv ?[6]$	0	0	0	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(2n + 1)(7n + 1)$ مضاعف 6

التمرين ـ 66

n عدد طبيعي . نضع $A = n^2 - n + 1$

1 ـ عين تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7

2 ـ إستنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A قابلا للقسمة على 7

3 ـ عين باقي قسمة العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ على 7

الحـل ـ 66

1 ـ

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$n^2 - n \equiv ?[7]$	0	0	2	6	5	6	2
$n^2 - n + 1 \equiv ?[7]$	1	1	3	0	6	0	3

نتيجة : إذا كان $n = 7k$ أو $n = 7k + 1$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 1

إذا كان $n = 7k + 2$ أو $n = 7k + 6$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 3

إذا كان $n = 7k + 4$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 6

إذا كان $n = 7k + 3$ أو $n = 7k + 5$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 0

2 ـ حسب السؤال (1) يكون A قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $n = 7k + 3$ أو $n = 7k + 5$ حيث $k \in IN$

3 ـ لاحظ أن العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ هو نفسه العدد A من أجل $n = 2753$

إذن : بما أن $2753 = 7(393) + 2$ فإن $A \equiv 3[7]$

أي باقي قسمة العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ على 7 هو 3

التمرين ـ 67

عين جميع الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $2n^3 - n^2 + 2$ يقبل القسمة على 7

الحـل ـ 67

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$n^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$2n^3 \equiv ?[7]$	0	2	2	5	2	5	5
$2n^3 - n^2 \equiv ?[7]$	0	1	5	3	0	1	4
$2n^3 - n^2 + 2 \equiv ?[7]$	2	3	0	5	2	3	6

نتيجة : يكون العدد $2n^3 - n^2 + 2$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $n \equiv 2[7]$

أي $n = 7k + 2$ حيث $k \in Z$

التمرين ـ 68

1 ـ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7

2 ـ إستنتج حسب قيم n الطبيعي باقي قسمة العدد $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ على 7

الحـل ـ 68

1 ـ $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ منه : $4^{3k} \equiv 1[7]$ ، $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ ، $4^{3k+2} \equiv 2[7]$

نتيجة :

n =	3 k	3 k + 1	3 k + 2
باقي قسمة 4^n على 7	1	4	2

2 ـ $851 \equiv 4[7]$ إذن : $851^{3n} \equiv 4^{3n}[7]$ ، $851^{2n} \equiv 4^{2n}[7]$ ، $851^n \equiv 4^n[7]$

أي $851^{3n} \equiv 1[7]$ حسب السؤال (1) ، $851^{2n} \equiv (4^n)^2[7]$ ، $851^n \equiv 4^n[7]$

منه : $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2 \equiv 1 + (4^{n})^{2} + 4^{n} + 2[7]$

أي $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2 \equiv 3 + 4^{n} + (4^{n})^{2}[7]$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$4^n \equiv ?[7]$	1	4	2
$(4^n)^2 \equiv ?[7]$	1	2	4
$4^n + (4^n)^2 + 3 \equiv ?[7]$	5	2	2

نتيجة :

إذا كان $n = 3k$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2$ على 7 هو 5

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2$ على 7 هو 2

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2$ على 7 هو 2

التمرين — 69

1 — أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 9

2 — برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلا للقسمة على 9

الحـل — 69

1 — $7^0 \equiv 1[9]$ ، $7^1 \equiv 7[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^3 \equiv 1[9]$

منه : $\begin{cases} 7^{3k} \equiv 1[9] \\ 7^{3k+1} \equiv 7[9] \\ 7^{3k+2} \equiv 4[9] \end{cases}$

2 — ليكن $n \in IN$ إذن : إما $n = 3k$ أو $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$7^n \equiv ?[9]$	1	7	4
$3n \equiv ?[9]$	0	3	6
$7^n + 3n \equiv ?[9]$	1	1	1
$7^n + 3n - 1 \equiv ?[9]$	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n

فإن $7^n + 3n - 1 \equiv 0[9]$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد

$7^n + 3n - 1$ قابل للقسمة على 9

التمرين — 70

حل في مجموعة الأعداد الطبيعية IN المعادلة $3x \equiv 7[8]$

الحـل — 70

$x \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$3x \equiv ?[8]$	0	3	6	1	4	7	2	5

نتيجة : $3x \equiv 7[8]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 5[8]$

منه حلول المعادلة $3x \equiv 7[8]$ هي الأعداد الطبيعية x التي تكتب من الشكل $x = 8k + 5$ حيث $k \in IN$

التمرين — 71

برهن أن لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 16[3]$

الحـل — 71

$8x^2 \equiv 16[3]$ تكافئ $8x^2 \equiv 1[3]$ لأن $16 \equiv 1[3]$

لنبحث عن بواقي قسمة $8x^2$ على 3

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$x^2 \equiv ?[3]$	0	1	1
$8x^2 \equiv ?[3]$	0	2	2

نتيجة : لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 1[3]$ (البواقي الممكنة حسب الجدول هي 0 و 2 فقط) إذن لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 16[3]$

التمرين – 72

1 – أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 2^n و 3^n على 7

2 – حل في مجموعة الأعداد الطبيعية N المعادلة $2^x + 3^x \equiv 0[7]$ ذات المجهول x

الحل – 72

1 –

$2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$

منه : $2^{3k} \equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

$3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^6 \equiv 1[7]$

منه : $3^{6k} \equiv 1[7]$ ، $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ ، $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ ، $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

2 – حسب السؤال الأول لدينا الجدول التالي :

$x \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2^x \equiv ?[7]$	1	2	4	1	2	4
$3^x \equiv ?[7]$	1	3	2	6	4	5
$2^x + 3^x \equiv ?[7]$	2	5	6	0	6	2

نتيجة : $2^x + 3^x \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 3[6]$

أي الحلول هي الأعداد الطبيعية x من الشكل $x = 6k + 3$ حيث $k \in IN$

التمرين – 73

عين قيم العدد الطبيعي x التي يكون من أجلها $5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11]$

الحل – 73

$5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11]$ تكافئ $5^x - 3^x \equiv -6[11]$

تكافئ $5^x - 3^x \equiv 5[11]$

لندرس بواقي قسمة 5^x و 3^x على 11 حسب قيم العدد الطبيعي x كمايلي :

$5^0 \equiv 1[11]$ ، $5^1 \equiv 5[11]$ ، $5^2 \equiv 3[11]$ ، $5^3 \equiv 4[11]$ ، $5^4 \equiv 9[11]$ ، $5^5 \equiv 1[11]$

منه : $5^{5k} \equiv 1[11]$ ، $5^{5k+1} \equiv 5[11]$ ، $5^{5k+2} \equiv 3[11]$ ، $5^{5k+3} \equiv 4[11]$ ، $5^{5k+4} \equiv 9[11]$

$3^0 \equiv 1[11]$ ، $3^1 \equiv 3[11]$ ، $3^2 \equiv 9[11]$ ، $3^3 \equiv 5[11]$ ، $3^4 \equiv 4[11]$ ، $3^5 \equiv 1[11]$

منه : $3^{5k} \equiv 1[11]$ ، $3^{5k+1} \equiv 3[11]$ ، $3^{5k+2} \equiv 9[11]$ ، $3^{5k+3} \equiv 5[11]$ ، $3^{5k+4} \equiv 4[11]$

منه الجدول التالي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$5^x \equiv ?[11]$	1	5	3	4	9
$3^x \equiv ?[11]$	1	3	9	5	4
$5^x - 3^x \equiv ?[11]$	0	2	5	10	5

نتيجة : يكون $5^x - 3^x \equiv 5[11]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 4[5]$ أو $x \equiv 2[5]$

منه قيم x المطلوبة هي : $x = 5k + 4$ أو $x = 5k + 2$ حيث $k \in IN$

التمرين ــ 74

1 ــ عين حسب قيم x بواقي قسمة x^2 على 5

2 ــ إستنتج أن المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ ذات المجهولين الطبيعيين x و y لا تقبل حلولا .

الحــل ــ 74

ــ 1

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv ?[5]$	0	1	4	4	1

2 ــ لنفرض أن الثنائية $(x ; y)$ من $IN \times IN$ هي حل للمعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$

إذن : $x^2 = 5y^2 + 3$

منه : $x^2 \equiv 3[5]$ و هذا مستحيل حسب السؤال (1) لأن البواقي الممكنة لقسمة x^2 على 5 هي $\{0 ; 1 ; 4\}$

إذن : المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ لا تقبل حلولا في $IN \times IN$

التمرين ــ 75

x و y عددان طبيعيان . نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $7x^2 + 2y^3 = 3$ .... (1)

1 ــ أتمم الجدول التالي :

$y \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \equiv ?[7]$							
$2y^3 \equiv ?[7]$							

2 ــ إستنتج أن المعادلة (1) لا تقبل حلولا في IN^2

الحــل ــ 75

ــ 1

$y \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$2y^3 \equiv ?[7]$	0	2	2	5	2	5	5

2 ــ لتكن الثنائية $(x ; y)$ من $IN \times IN$ حلا للمعادلة (1)

إذن : $7x^2 + 2y^3 = 3$

أي : $2y^3 = -7x^2 + 3$

أي : $2y^3 \equiv 3[7]$ مستحيل حسب السؤال (1) لأن البواقي الممكنة لقسمة $2y^3$ على 7 هي $\{0 ; 2 ; 5\}$

إذن : المعادلة (1) لا تقبل حلولا في IN^2

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية IN المعادلة ذات المجهولين x و y التالية : $3^x = 8 + y^2$ .... (1)

1 ــ ناقش حسب قيم x بواقي قسمة 3^x ثم y^2 على 8

2 ــ برهن أن إذا كان x فردي فإن المعادلة (1) لا تقبل حلولا

3 ــ نفرض أن $x = 2n$. حلل العبارة $3^{2n} - y^2$ ثم بين أن $3^n \leq 8$

4 ــ إستنتج الثنائية $(x ; y)$ التي تحقق المعادلة (1)

الحـل ــ 1

1 ــ $3^0 \equiv 1[8]$ ، $3^1 \equiv 3[8]$ ، $3^2 \equiv 1[8]$ منه : $\left.\begin{array}{l}3^{2k} \equiv 1[8]\\3^{2k+1} \equiv 3[8]\end{array}\right\}$

$y \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y^2 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

2 ــ ليكن x فردي إذن : $3^x \equiv 3[8]$

إذن : إذا وجدت ثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $3^x = 8 + y^2$

أي : $y^2 = 3^x - 8$

أي : $y^2 \equiv 3^x[8]$

أي : $y^2 \equiv 3[8]$ مستحيل حسب السؤال الأول لأن بواقي قسمة y^2 على 8 هي $\{0 ; 1 ; 4\}$

منه : المعادلة (1) لا تقبل حلولا من أجل x فردي

3 ــ ليكن $x = 2n$ حيث $n \in IN$

$$3^{2n} - y^2 = (3^n - y)(3^n + y)$$

إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $3^x = 8 + y^2$

إذن : $3^x - y^2 = 8$

أي من أجل $x = 2n$ فإن : $(3^n - y)(3^n + y) = 8$

منه : $3^n + y$ يقسم 8

إذن : $3^n + y \leq 8$

أي $3^n \leq 8$ لأن $y \geq 0$

4 ــ حسب السؤال (3) : $3^n \leq 3$ إذن : $n \in \{0 ; 1\}$

$x = 2n$ إذن : $x \in \{0 ; 2\}$

من أجل $x = 0$ نحصل على : $1 = 8 + y^2$ مستحيل .

من أجل $x = 2$ نحصل على : $9 = 8 + y^2$ منه $y^2 = 1$ أي $y = 1$ لأن $y \in IN$

نتيجة : الحل الوحيد للمعادلة (1) في مجموعة الأعداد الطبيعية هو $x = 2$ ؛ $y = 1$

التمرين ــ 2

ليكن p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 7 . نضع $n = p^4 - 1$

1 ــ برهن أن p يوافق 1- أو 1 بترديد 3 ثم إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3

2 ــ أثبت أنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$ ثم إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16

3 ــ باستعمال البواقي الممكنة لقسمة p على 5 أثبت أن 5 هو قاسم للعدد n

الحـل ــ 2

1 ــ p أولي و $p \geq 7$ إذن : إما $p \equiv 0[3]$ مستحيل لأن p لا يقبل قاسم أصغر منه
أو $p \equiv 1[3]$
أو $p \equiv 2[3]$

أي $\left.\begin{array}{l} p \equiv 1[3] \\ \text{أو } p \equiv -1[3] \end{array}\right\}$ لأن $2 \equiv -1[3]$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} p \equiv 1[3] \\ \text{أو } p \equiv -1[3] \end{array}\right.$ إذن : $\left.\begin{array}{l} p^4 \equiv 1[3] \\ \text{أو } p^4 \equiv 1[3] \end{array}\right\}$ لأن $(-1)^4 \equiv 1[3]$

أي $p^4 \equiv 1[3]$

منه $p^4 - 1 \equiv 0[3]$

أي $n \equiv 0[3]$

أي n يقبل القسمة على 3

2 ــ p أولي و $p \geq 7$ إذن p فردي منه يوجد عدد طبيعي k حيث $p = 2k + 1$ ($k \geq 3$ لأن $p \geq 7$)

إذن : $p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1$

$= 4k^2 + 4k + 1 - 1$

$= 4k(k+1)$ و هو المطلوب .

نتيجة : $n = p^4 - 1$

$= (p^2 - 1)(p^2 + 1)$

$= 4k(k+1)[(2k+1)^2 + 1]$ لأن $p = 2k + 1$

$= 4k(k+1)(4k^2 + 4k + 2)$

$= 8k(k+1)(2k^2 + 2k + 1)$

نميز حالتين :

الأولى : k زوجي إذن : $k = 2q$ منه $n = 16q(k+1)(2k^2 + 2k + 1)$

إذن : n يقبل القسمة على 16

الثانية : k فردي إذن $(k+1)$ زوجي

أي $k + 1 = 2q$ منه $n = 16kq(2k^2 + 2k + 1)$

إذن : n يقبل القسمة على 16

خلاصة : من أجل كل قيمة لــ p فإن n يقبل القسمة على 16

3 ــ ليكن p أولي إذن بواقي قسمة p على 5 هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

$p \equiv ?[5]$	1	2	3	4
$p^2 \equiv ?[5]$	1	4	4	1
$p^4 \equiv ?[5]$	1	1	1	1
$p^4 - 1 \equiv ?[5]$	0	0	0	0

نتيجة : من أجل أي قيمة للعدد p فإن $p^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي 5 قاسم لــ n

التمرين ــ 3

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $1000n \equiv n[111]$

2 ــ إستنتج أن الأعداد التالية تقبل القسمة على 111 : $\{111111$ ، 100010001 ، $100010000001\}$

الحــل ــ 3

1 ــ $1000 = 9(111) + 1$ إذن : $1000 \equiv 1[111]$

منه : $1000n \equiv n[111]$

2 ــ لدينا $111111 = 111 \times 1000 + 111$

لكن $\left\{\begin{array}{l} 1000 \times 111 \equiv 111[111] \\ 111 \equiv 0[111] \end{array}\right.$

إذن : $111 \times 1000 + 111 \equiv 111[111]$

أي : $111111 \equiv 0[111]$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} 100 \times 1000 \equiv 100[111] \\ 10 \equiv 10[111] \end{array}\right.$ إذن : $100010 \equiv 110[111]$

منه : $100010000 \equiv 110[111]$ لأن $1000 \equiv 1[111]$

إذن : $100010001 \equiv 111[111]$ (إضافة $1+$ إلى الطرفين)

أي $100010001 \equiv 0[111]$

إذن : $100010000 \equiv 110[111]$ ، $100010000000 \equiv 110[111]$ لأن $1000 \equiv 1[111]$

منه $100010000001 \equiv 111[111]$ (إضافة 1 + إلى الطرفين)

أي $100010000001 \equiv 0[111]$

التمرين ـ 4

a عدد طبيعي . باقي قسمته على 8 هو 2 و باقي قسمته على 104 هو r

1 ـ برهن أن $r \equiv 2[8]$.

2 ـ ماهي القيم الممكنة لـ r ؟

b عدد طبيعي باقي قسمته على 13 هو 3 و باقي قسمته على 104 هو r

3 ـ برهن أن $r \equiv 3[13]$

4 ـ ماهي القيم الممكنة لـ r ؟

ليكن x عدد طبيعي باقي قسمته على 8 هو 2 ، و على 13 هو 3 و على 104 هو r

5 ـ إستنتج من (1) و (2) قيمة r

الحل ـ 4

1 ـ $a \equiv 2[8]$ إذن : $a = 8n + 2$ حيث $n \in IN$

$a \equiv r[104]$ إذن : $a = 104k + r$ حيث $k \in IN$ و $0 \leq r < 104$

نتيجة : $a = 104k + r$ إذن : $a = 8 \times 13k + r$

أي $a = 8k' + r$ حيث $k' = 13k$

منه : $8k' + r \equiv 8n + 2[8]$ لأن $a \equiv a[8]$

أي : $r \equiv 2[8]$

2 ـ لدينا $\left\{\begin{matrix} 0 \leq r < 104 \\ r \equiv 2[8] \end{matrix}\right.$ إذن : $r \in \{2 ; 10 ; 18 ; 26 ; 34 ; 42 ; 50 ; 58 ; 66 ; 74 ; 82 ; 90 ; 98\}$

3 ـ $b \equiv 3[13]$ إذن : $b = 13n + 3$ حيث $n \in IN$

$b \equiv r[104]$ إذن : $b = 104k + r$ حيث $k \in IN$

منه $b = 13 \times 8k + r$

أي $b = 13k' + r$ حيث $k' = 8k$

منه $13k' + r \equiv 13n + 3[13]$ لأن $b \equiv b[13]$

أي $r \equiv 3[13]$

4 ـ $\left\{\begin{matrix} 0 \leq r < 104 \\ r \equiv 3[13] \end{matrix}\right.$ إذن : $r \in \{3 ; 16 ; 29 ; 42 ; 55 ; 68 ; 81 ; 94\}$

5 ـ (α) $\left\{\begin{matrix} x \equiv 2[8] \\ x \equiv 3[13] \\ x \equiv r[104] \end{matrix}\right.$

نضع $A = \{2 ; 10 ; 18 ; 26 ; 34 ; 42 ; 50 ; 58 ; 66 ; 74 ; 82 ; 90 ; 98\}$

$B = \{3 ; 16 ; 29 ; 42 ; 55 ; 68 ; 81 ; 94\}$

إذن : تكون الجملة (α) محققة إذا و فقط إذا كان $r \in A \cap B$ أي $r = 42$

التمرين ـ 5

1 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل القيم 5 , 4 , 3 , 2 , 1 للعدد الطبيعي n

2 ـ إستنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل كل عدد طبيعي n

3 ـ بين أن العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11

الحل ـ 5

1 ـ

$5^1 \equiv 5[11]$

$5^2 \equiv 3[11]$

$5^3 \equiv 4[11]$

$5^4 \equiv 9[11]$

$5^5 \equiv 1[11]$

2 ـ حسب السؤال (1) نستنتج أن :

إذا كان $n = 5k$ فإن $5^n \equiv 1[11]$

إذا كان $n = 5k + 1$ فإن $5^n \equiv 5[11]$

إذا كان $n = 5k + 2$ فإن $5^n \equiv 3[11]$

إذا كان $n = 5k + 3$ فإن $5^n \equiv 4[11]$

إذا كان $n = 5k + 4$ فإن $5^n \equiv 9[11]$

3 ـ $\left.\begin{array}{l}2008 = 5(401) + 3\\1428 = 5(285) + 3\end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l}5^{2008} \equiv 4[11]\\5^{1428} \equiv 4[11]\end{array}\right\}$

منه $5^{2008} - 5^{1428} \equiv 0[11]$

أي العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11

__التمرين ـ 6__

1 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل القيم 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 للعدد الطبيعي n

2 ـ إستنتج بواقي قسمة العدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n

3 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2})$ على 7

__الحـل ـ 6__

1 ـ
$3^1 \equiv 3[7]$
$3^2 \equiv 2[7]$
$3^3 \equiv 6[7]$
$3^4 \equiv 4[7]$
$3^5 \equiv 5[7]$
$3^6 \equiv 1[7]$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن : إذا كان $n = 6k$ فإن $3^n \equiv 1[7]$

إذا كان $n = 6k + 1$ فإن $3^n \equiv 3[7]$

إذا كان $n = 6k + 2$ فإن $3^n \equiv 2[7]$

إذا كان $n = 6k + 3$ فإن $3^n \equiv 6[7]$

إذا كان $n = 6k + 4$ فإن $3^n \equiv 4[7]$

إذا كان $n = 6k + 5$ فإن $3^n \equiv 5[7]$

3 ـ $10 \equiv 3[7]$ إذن : $10^{1408} \equiv 3^{1408}[7]$

بما أن $1408 = 6(234) + 4$ فإن $3^{1408} \equiv 4[7]$

إذن : $10^{1408} \equiv 4[7]$ ....(1)

بما أن $1988 = 6(331) + 2$ فإن $3^{1988} \equiv 2[7]$ ....(2)

لدينا : $9^{3n+2} = 3^{2(3n+2)} = 3^{6n+4}$

إذن : $9^{3n+2} \equiv 4[7]$

خلاصة : $\left.\begin{array}{l}3^{1988} \equiv 2[7]\\10^{1408} \equiv 4[7]\\9^{3n+2} \equiv 4[7]\end{array}\right\}$

إذن : $3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2} \equiv 2 + 4 + 4[7]$

أي $3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2} \equiv 3[7]$ (باقي القسمة هو 3)

__التمرين ـ 7__

1 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل القيم 4 , 3 , 2 , 1 للعدد الطبيعي n ثم إستنتج بواقي القسمة على 5 للعدد 2^n ثم 3^n على 5 من أجل كل عدد طبيعي n

2 ـ أوجد باقي القسمة على 5 لكل من الأعداد 2^{14} و 3^{10}

3 ـ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n})$ يقبل القسمة على 5

الحـل ـ 7

1 ـ $2^1 \equiv 2[5]$

$2^2 \equiv 4[5]$

$2^3 \equiv 3[5]$

$2^4 \equiv 1[5]$

منه النتائج التالية : إذا كان $n = 4k$ فإن $2^n \equiv 1[5]$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $2^n \equiv 2[5]$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $2^n \equiv 4[5]$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $2^n \equiv 3[5]$

من جهة أخرى : $3 \equiv -2[5]$ إذن $3^n \equiv (-2)^n[5]$

إذن : $3^n \equiv 2^n[5]$ إذا كان n زوجي

$3^n \equiv -2^n[5]$ إذا كان n فردي

منه النتائج التالية :

إذا كان $n = 4k$ فإن $3^n \equiv 1[5]$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $3^n \equiv -2[5]$ أي $3^n \equiv 3[5]$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $3^n \equiv 4[5]$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $3^n \equiv -3[5]$ أي $3^n \equiv 2[5]$

2 ـ $14 = 4(3) + 2$ إذن : $2^{14} \equiv 4[5]$

$10 = 4(2) + 2$ إذن : $3^{10} \equiv 4[5]$

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $3^{4n+1} \equiv 3[5]$ ، $2^{4n} \equiv 1[5]$

إذن : $2 \times 3^{4n+1} \equiv 2 \times 3[5]$ ، $2^{4n} \equiv 1[5]$

أي $2 \times 3^{4n+1} \equiv 1[5]$ ، $2^{4n} \equiv 1[5]$

منه $2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n} \equiv 0[5]$ إذن $2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n}$ يقبل القسمة على 5

التمرين ـ 8

n عدد طبيعي .

1 ـ أدرس تبعا لقيم n بواقي قسمة 5^n على 7

2 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7

3 ـ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7

الحـل ـ 8

1 ـ

$5^0 \equiv 1[7]$

$5^1 \equiv 5[7]$

$5^2 \equiv 4[7]$

$5^3 \equiv 6[7]$

$5^4 \equiv 2[7]$

$5^5 \equiv 3[7]$

$5^6 \equiv 1[7]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 5^n على 7
6 k	1
6 k + 1	5
6 k + 2	4
6 k + 3	6
6 k + 4	2
6 k + 5	3

2 ـ $6 \equiv -1[7]$ إذن : $6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$ أي $6^{2n} \equiv 1[7]$

منه باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7 هو 1

3 ـ يكون $5^n + 6^{2n} + 3$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7]$

أي : $5^n + 1 + 3 \equiv 0[7]$ لأن $6^{2n} \equiv 1[7]$

أي : $5^n \equiv -4[7]$

أي : $5^n \equiv 3[7]$

منه : حسب بواقي قسمة 5^n على 7 فإن $n = 6k + 5$ حيث $k \in IN$

التمرين ـــ 9

1 ـــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

2 ـــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7

3 ـــ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها باقي قسمة 2^n على كل من 5 و 7 هو 4

الحـــل ـــ 9

1 ـــ

$2^0 \equiv 1[5]$
$2^1 \equiv 2[5]$
$2^2 \equiv 4[5]$
$2^3 \equiv 3[5]$
$2^4 \equiv 1[5]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 2^n على 5
4 k	1
4 k + 1	2
4 k + 2	4
4 k + 3	3

2 ـــ

$2^0 \equiv 1[7]$
$2^1 \equiv 2[7]$
$2^2 \equiv 4[7]$
$2^3 \equiv 1[7]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 2^n على 7
3 p	1
3 p + 1	2
3 p + 2	4

3 ـــ يكون باقي قسمة 2^n على 7 و على 5 هو 4 إذا و فقط إذا تحقق الشرطين التاليين : $\begin{cases} n = 4k + 2 \\ n = 3p + 2 \end{cases}$

منه $4k + 2 = 3p + 2$

أي : $4k = 3p$

إذن يكفي أن يكون $k = 3q$ و $p = 4q$ حيث $q \in IN$

منه : $n = 12q + 2$ حيث $q \in IN$

أي $n \equiv 2[12]$ هي قيم n المطلوبة .

التمرين ـــ 10

عين قيم العدد الطبيعي n الذي يكون من أجلها $(n - 1)$ مضاعف 3

و العدد $[1 + (n - 1) 2^n]$ قابلا للقسمة على 7 .

الحـــل ـــ 10

$(n - 1)$ مضاعف 3 أي $n - 1 \equiv 0[3]$ منه $n \equiv 1[3]$ أي $n = 3p + 1$ حيث $p \in IN$

إذن : $n = 3p + 1$

منه : $2^n = 2^{3p+1} = 2 \times 2^{3p} = 2 \times 8^p$

لدينا $8 \equiv 1[7]$ إذن $8^p \equiv 1^p[7]$

أي $8^p \equiv 1[7]$

منه : $2 \times 8^p \equiv 2[7]$

أي : $2^n \equiv 2[7]$ (من أجل $n = 3p + 1$)

منه : $(n - 1)2^n \equiv 2(3p + 1 - 1)[7]$

أي $(n - 1)2^n \equiv 6p[7]$

منه : $1 + (n - 1)2^n \equiv 1 + 6p[7]$

نتيجة : يكون $1 + (n - 1) 2^n$ قابلا للقسمة على 7 و $(n - 3)$ مضاعف 3 إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} 1 + (n - 1)2^n \equiv 0[7] \\ n = 3p + 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} n = 3p + 1 \\ 1 + 6p \equiv 0[7] \end{cases}$

لندرس إذن بواقي قسمة $1 + 6p$ على 7 كمايلي :

$p \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$6p \equiv ?[7]$	0	6	5	4	3	2	1
$6p + 1 \equiv ?[7]$	1	0	6	5	4	3	2

نتيجة : $1 + 6p \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $p \equiv 1[7]$ أي $p = 7k + 1$

خلاصة : $\begin{cases} p = 7k + 1 \\ n = 3p + 1 \end{cases}$ منه : $n = 3(7k + 1) + 1$

أي : $n = 21k + 4$ حيث $k \in \mathbb{N}$

أي : $n \equiv 4[21]$ هي قيم n المطلوبة .

التمرين ــ 11

1 ــ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^k على 5 من أجل القيم من 1 إلى 8 للعدد الطبيعي k

2 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن باقي القسمة الإقليدية لــ 2^{4n} على 5 هو 1

3 ــ إستنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5

4 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3$ يقبل القسمة على 5

الحــل ــ 11

1 ــ $2^0 \equiv 1[5]$ ؛ $2^4 \equiv 1[5]$ ؛ $2^8 \equiv 1[5]$

$2^1 \equiv 2[5]$ ؛ $2^5 \equiv 2[5]$

$2^2 \equiv 4[5]$ ؛ $2^6 \equiv 4[5]$

$2^3 \equiv 3[5]$ ؛ $2^7 \equiv 3[5]$

2 ــ لدينا $2^{4n} = 16^n$

بما أن $16 \equiv 1[5]$ فإن $16^n \equiv 1^n[5]$

أي $16^n \equiv 1[5]$

منه : $2^{4n} \equiv 1[5]$ و هو المطلوب

3 ــ $17 \equiv 2[5]$ إذن : $17^{4n} \equiv 2^{4n}[5]$

أي $17^{4n} \equiv 1[5]$ حسب السؤال (2)

4 ــ حسب السؤال (1) فإن $2^{4n+3} \equiv 3[5]$ ....(1)

من جهة أخرى : $17^{4n+2} = 17^{4n} \times 17^2$

لدينا $\begin{cases} 17^{4n} \equiv 1[5] \\ 17^2 \equiv 4[5] \end{cases}$ حسب السؤال (3)

إذن : $17^{4n} \times 17^2 \equiv 4 \times 1[5]$ أي $17^{4n+2} \equiv 4[5]$ .... (2)

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2^{4n+3} + 17^{4n+2} \equiv 3 + 4[5]$

منه $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 \equiv 3 + 4 + 3[5]$

أي : $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 \equiv 0[5]$ و هو المطلوب

التمرين ــ 12

1 ــ عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لــ 4^n على 11

2 ــ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث $(7 + 26^{10n+2} + 6 \times 1995^n)$ يقبل القسمة على 11

الحــل ــ 12

1 ــ

$4^0 \equiv 1[11]$

$4^1 \equiv 4[11]$

$4^2 \equiv 5[11]$

$4^3 \equiv 9[11]$

$4^4 \equiv 3[11]$

$4^5 \equiv 1[11]$ منه

قيم n	باقي قسمة 4^n على 11
5 k	1
5 k + 1	4
5 k + 2	5
5 k + 3	9
5 k + 4	3

2 ــ $26 \equiv 4[11]$ إذن : $26^{10n+2} \equiv 4^{10n+2}[11]$

أي $26^{10n+2} \equiv 4^2 \times 4^{10n}[11]$

أي $26^{10n+2} \equiv 16 \times 4^{5(2n)}[11]$

أي $26^{10n+2} \equiv 5 \times 1[11]$ لأن $4^{5k} \equiv 1[11]$

منه $26^{10n+2} + 7 \equiv 5 + 7[11]$

أي $(1) .... 26^{10n+2} + 7 \equiv 1[11]$

إذن $1995 \equiv 4[11]$ $1995^n \equiv 4^n[11]$

منه $(2) .... 6 \times 1995^n \equiv 6 \times 4^n[11]$

بجمع (1) و (2) : $6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv 1 + 6 \times 4^n[11]$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$4^n \equiv ?[11]$	1	4	5	9	3
$6 \times 4^n \equiv ?[11]$	6	2	8	10	7
$1 + 6 \times 4^n \equiv ?[11]$	7	3	9	0	8

نتيجة : يكون $1 + 6 \times 4^n$ مضاعف 11 أي $(6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7)$ قابل للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $n \equiv 3[5]$ أي قيم n المطلوبة هي $n = 5k + 3$ حيث $k \in IN$

التمرين ــ 13

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

2 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7

3 ــ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ يقبل القسمة على 7

الحـل ــ 13

1 ــ

$5^0 \equiv 1[7]$
$5^1 \equiv 5[7]$
$5^2 \equiv 4[7]$
$5^3 \equiv 6[7]$
$5^4 \equiv 2[7]$
$5^5 \equiv 3[7]$
$5^6 \equiv 1[7]$ منه

قيم n	باقي قسمة 5^n على 7
6 k	1
6 k + 1	5
6 k + 2	4
6 k + 3	6
6 k + 4	2
6 k + 5	3

2 ــ $26 \equiv 5[7]$ إذن : $26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7]$

منه : $26^{6n+5} \equiv 3[7]$ لأن $5^{6n+5} \equiv 3[7]$

$47 \equiv 5[7]$ إذن : $47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7]$

أي $47^{12n+2} \equiv (5^{6n+1})^2[7]$

أي $47^{12n+2} \equiv 5^2[7]$ لأن $5^{6n+1} \equiv 5[7]$

أي $47^{12n+2} \equiv 4[7]$

منه $2 \times 47^{12n+2} \equiv 2 \times 4[7]$

أي $2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$

خلاصة : $\begin{cases} 26^{6n+5} \equiv 3[7] \\ 2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7] \\ 3 \equiv 3[7] \end{cases}$

إذن بالجمع : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$

3 ــ حسب السؤال السابق : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$

إذن : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} \equiv 4[7]$

إذن : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 5n + 4[7]$

نتيجة : يكون العدد $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان العدد $5n + 4$ قابلا للقسمة على 7 أي $5n + 4 \equiv 0[7]$

أي $5n \equiv 3[7]$

لندرس إذن بواقي قسمة $5n$ على 7 كمايلي :

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5n \equiv ?[7]$	0	5	3	1	6	4	2

منه : $5n \equiv 3[7]$ يكافئ $n \equiv 2[7]$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n = 7k + 2$ حيث $k \in IN$

التمرين — 14

1 — أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 13

2 — عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $4(3^{n+1} - 1)$ مضاعف للعدد 13

الحل — 14

— 1

$3^0 \equiv 1[13]$
$3^1 \equiv 3[13]$
$3^2 \equiv 9[13]$
$3^3 \equiv 1[13]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 3^n على 13
$3k$	1
$3k + 1$	3
$3k + 2$	9

2 — لدينا : $4(3^{n+1} - 1) = 4(3 \times 3^n - 1)$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$3^n \equiv ?[13]$	1	3	9
$3 \times 3^n \equiv ?[13]$	3	9	1
$3 \times 3^n - 1 \equiv ?[13]$	2	8	0
$4(3 \times 3^n - 1) \equiv ?[13]$	8	6	0

نتيجة : يكون العدد $4(3^{n+1} - 1)$ مضاعفا لـ 13 إذا و فقط إذا كان $n \equiv 2[3]$

أي $n = 3k + 2$ حيث $k \in IN$

التمرين — 15

عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد $15(16^{n+1} - 1)$ على 7

الحل — 15

$16 \equiv 2[7]$ إذن : $16^{n+1} \equiv 2^{n+1}[7]$

أي : $16^{n+1} \equiv 2 \times 2^n[7]$

منه : $16^{n+1} - 1 \equiv 2 \times 2^n - 1[7]$

من جهة أخرى : $15 \equiv 1[7]$

إذن : $15(16^{n+1} - 1) \equiv 2 \times 2^n - 1[7]$

لندرس إذن بواقي قسمة 2^n على 7 كمايلي :

$2^0 \equiv 1[7]$
$2^1 \equiv 2[7]$
$2^2 \equiv 4[7]$
$2^3 \equiv 1[7]$

منه :

$2^{3k} \equiv 1[7]$
$2^{3k+1} \equiv 2[7]$
$2^{3k+2} \equiv 4[7]$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$2^n \equiv ?[7]$	1	2	4
$2 \times 2^n \equiv ?[7]$	2	4	1
$2 \times 2^n - 1 \equiv ?[7]$	1	3	0

خلاصة : بواقي قسمة $15(16^{n+1} - 1)$ على 7 هي كمايلي :

إذا كان $n = 3k$ فإن الباقي هو 1

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن الباقي هو 3

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن الباقي هو 0

التمرين ـــ 16

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـــ 3^n على 10

2 ــ إستنتج باقي القسمة الإقليدية على 10 للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$

3 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)\, 3^{2n+1}[10]$

4 ــ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$

الحـــل ـــ 16

ـــ 1

$3^0 \equiv 1[10]$
$3^1 \equiv 3[10]$
$3^2 \equiv 9[10]$
$3^3 \equiv 7[10]$
$3^4 \equiv 1[10]$: منه

قيم n	باقي قسمة 3^n على 10
4 k	1
4 k + 1	3
4 k + 2	9
4 k + 3	7

ـــ 2 $9^{2001} = 3^{2(2001)} = 3^{4002}$

بما أن $4002 = 4(1000) + 2$ فإن $3^{4002} \equiv 9[10]$ أي $9^{2001} \equiv 9[10]$ .... (1)

من جهة أخرى $63 \equiv 3[10]$

إذن : $63 \times 9^{2001} \equiv 3 \times 9[10]$

أي $63 \times 9^{2001} \equiv 7[10]$

أيضا : $7 \equiv -3[10]$ إذن : $7^{1422} \equiv (-3)^{1422}[10]$

أي $7^{1422} \equiv 3^{1422}[10]$ لأن الأس زوجي

بما أن : $1422 = 4(355) + 2$ فإن $3^{1422} \equiv 9[10]$

إذن : $7^{1422} \equiv 9[10]$

نتيجة : $\begin{cases} 63 \times 9^{2001} \equiv 7[10] \\ 7^{1422} \equiv 9[10] \end{cases}$

إذن : $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 7 - 9[10]$

أي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8[10]$

إذن : باقي قسمة $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 هو 8

ـــ 3 $3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = n \times 3^{2n+1}$ منه $3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1}[10]$

من جهة أخرى : $7 \equiv -3[10]$ إذن : $7^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1}[10]$

أي $7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$ لأن $(-3)^{2n+1} = -3^{2n+1}$

نتيجة : $\begin{cases} 3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1}[10] \\ 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10] \end{cases}$

إذن : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv n \times 3^{2n+1} - 3^{2n+1}[10]$

أي : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$ و هو المطلوب

4 ــ يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ إذا و فقط إذا كان $(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$

إذن يكفي أن ندرس بواقي قسمة العدد $(n-1) \times 3^{2n+1}$ على 10 كمايلي :

لدينا $3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n$

بما أن $9 \equiv -1[10]$ فإن $9^n \equiv (-1)^n[10]$

أي : $\begin{cases} 9^n \equiv 1[10] & \text{إذا كان n زوجي} \\ 9^n \equiv -1[10] & \text{إذا كان n فردي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} 9^n \equiv 1[10] & \text{إذا كان n زوجي} \\ 9^n \equiv 9[10] & \text{إذا كان n فردي} \end{cases}$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n - 1 \equiv ?[10]$	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$9^n \equiv ?[10]$	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9
$3 \times 9^n \equiv ?[10]$	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7
$(n-1) \times 3 \times 9^n \equiv ?[10]$	7	0	3	4	9	8	5	2	1	6

نتيجة : يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 1[10]$

أي : $n = 10k + 1$ حيث $k \in IN$

مثلا : من أجل $n = 1$: $3 \times 9 + 7^3 = 27 + 343 = 370$ و $370 \equiv 0[10]$

التمرين ــ 17

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 4^n على 7

2 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

3 ــ أحسب بدلالة n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

4 ــ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S قابلا للقسمة على 7

الحــل ــ 17

ــ1

$3^0 \equiv 1[7]$
$3^1 \equiv 3[7]$
$3^2 \equiv 2[7]$
$3^3 \equiv 6[7]$
$3^4 \equiv 4[7]$
$3^5 \equiv 5[7]$
$3^6 \equiv 1[7]$ منه

قيم n	باقي قسمة 3^n على 7
$6k$	1
$6k+1$	3
$6k+2$	2
$6k+3$	6
$6k+4$	4
$6k+5$	5

$4^0 \equiv 1[7]$
$4^1 \equiv 4[7]$
$4^2 \equiv 2[7]$
$4^3 \equiv 1[7]$ منه

قيم n	باقي قسمة 4^n على 7
$3p$	1
$3p+1$	4
$3p+2$	2

ــ2 $1424 \equiv 3[7]$ إذن : $1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7]$

أي : $1424^{6n+1} \equiv 3[7]$ حسب السؤال (1)

$2006 \equiv 4[7]$ إذن : $2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7]$

أي $2006^{3n+2} \equiv 2[7]$ حسب السؤال (1)

منه : $2 \times 2006^{3n+2} \equiv 2 \times 2[7]$

أي $2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$

نتيجة : $\begin{cases} 1424^{6n+1} \equiv 3[7] \\ 2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7] \end{cases}$

إذن : $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 3 + 4[7]$

أي : $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$ و هو المطلوب

ــ3

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n$$
$$= (2 \times 3^0 + 3 \times 4^0) + (2 \times 3^1 + 3 \times 4^1) + ... + (2 \times 3^n + 3 \times 4^n)$$
$$= 2(3^0 + 3^1 + ... + 3^n) + 3(4^0 + 4^1 + ... + 4^n)$$
$$= 2\left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}\right) + 3\left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right)$$
$$= 3^{n+1} - 1 + 4^{n+1} - 1$$

$= 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$

4 ـ يكون S قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $S \equiv 0[7]$

أي $3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7]$

أي $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$

أي $3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv 2[7]$

لندرس إذن بواقي قسمة $3 \times 3^n + 4 \times 4^n$ على 7 كمايلي :

$n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$3^n \equiv ?[7]$	1	3	2	6	4	5
$3 \times 3^n \equiv ?[7]$	3	2	6	4	5	1
$4^n \equiv ?[7]$	1	4	2	1	4	2
$4 \times 4^n \equiv ?[7]$	4	2	1	4	2	1
$3\times3^n + 4 \times 4^n \equiv ?[7]$	0	4	0	1	0	2

نتيجة : $3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv 2[7]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 5[6]$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n = 6k + 5$ حيث $k \in IN$

التمرين ــ 18

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي k فإن العدد $(7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^n$

3 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $S_{n+4} \equiv S_n[10]$

4 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10

الحـل ــ 18

ـ 1

$7^0 \equiv 1[10]$

$7^1 \equiv 7[10]$

$7^2 \equiv 9[10]$

$7^3 \equiv 3[10]$

$7^4 \equiv 1[10]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 7^n على 10
4 k	1
4 k + 1	7
4 k + 2	9
4 k + 3	3

2 ــ حسب السؤال (1) فإن من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

$$\begin{cases} 7^{4k} \equiv 1[10] \\ 7^{4k+1} \equiv 7[10] \\ 7^{4k+2} \equiv 9[10] \\ 7^{4k+3} \equiv 3[10] \end{cases}$$

منه $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10]$

أي $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$

3 ــ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $S_{n+4} = S_n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}$

إذن : $S_{n+4} \equiv S_n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}[10]$

لكن $7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4} \equiv 0[10]$ حسب السؤال (2)

لأن الأعداد $n+1$ ، $n+2$ ، $n+3$ ، $n+4$ متتابعة .

إذن : $S_{n+4} \equiv S_n[10]$

ـ 4

$S_0 = 1$ إذن : $S_0 \equiv 1[10]$

$S_1 = 1 + 7$ إذن : $S_1 \equiv 8[10]$

$S_2 = 1 + 7 + 49$ إذن : $S_2 \equiv 7[10]$

$S_3 = 1 + 7 + 49 + 343$ إذن : $S_3 \equiv 0[10]$

خلاصة : إذا كان $n = 4k$ فإن $S_n \equiv 1[10]$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $S_n \equiv 8[10]$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $S_n \equiv 7[10]$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $S_n \equiv 0[10]$

التمرين ـــ 19

x و y عددان طبيعيان غير معدومان

أوجد الأعداد التي تكتب $\overline{y\,x}$ في النظام العشري و $\overline{x\,y}$ في النظام ذو الأساس 7

الحـل ـــ 19

x و y هما رقمان في النظام ذو الأساس 7 إذن : $x \leq 6$ و $y \leq 6$

و حسب المعطيات $x \neq 0$ و $y \neq 0$

إذن : $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ;5 ; 6\}$ ؛ $y \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ;5 ; 6\}$

في النظام العشري $\overline{y\,x}$ ينشر إلى $x + 10\,y$

في النظام ذو الأساس 7 $\overline{x\,y}$ ينشر إلى $7\,x + y$

منه : $x + 10\,y = 7\,x + y$ أي $9\,y = 6\,x$ أي $3\,y = 2\,x$

إذن : $x = \dfrac{3\,y}{2}$ منه y زوجي لأن $x \in \mathbb{N}$

أي $y \in \{2 ; 4 ; 6\}$

من أجل $y = 2$: $x = 6/2 = 3$

من أجل $y = 4$: $x = 12/2 = 6$

من أجل $y = 6$: $x = 18/2 = 9$ مرفوض لأن $x \leq 6$

نتيجة : $(x ; y) \in \{(3 ; 2) ; (6 ; 4)\}$

إذن الأعداد المطلوبة هي $\overline{46}$ و $\overline{23}$ (مكتوبة في النظام العشري)

أو $\overline{64}$ و $\overline{32}$ مكتوبة في النظام ذو الأساس 7

التمرين ـــ 20

عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $n = \overline{x\,y\,z}$ في النظام ذو الأساس 7 و يكتب $n = \overline{z\,y\,x}$ في النظام ذو الأساس 11

الحـل ـــ 20

x ، y ، z أرقام في النظام ذو الأساس 7 إذن كل من x و y و z ينتمي إلى المجموعة

$A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

في النظام ذو الأساس 7 : $n = \overline{x\,y\,z}$ إذن : $n = 49\,x + 7\,y + z$

في النظام ذو الأساس 11 : $n = \overline{z\,y\,x}$ إذن : $n = 121\,z + 11\,y + x$

إذن : $49\,x + 7\,y + z = 121\,z + 11\,y + x$

أي : $48\,x = 120\,z + 4y$

أي : $12\,x = 30\,z + y$

أي : $y = 12\,x - 30\,z$

أي : $y = 6(2\,x - 5\,z)$

منه : إما $y = 6$ و $2\,x - 5\,z = 1$ أو $y = 0$ و $2\,x - 5\,z = 0$

أي إما $y = 6$ و $2\,x = 5\,z + 1$ أو $y = 0$ و $2\,x = 5\,z$

أي إما $y = 6$ و $(x ; z) = (3 , 1)$ أو $y = 0$ و $(x ; z) \in \{(0 ; 0) ; (5 ; 2)\}$

نتيجة : $(x ; y ; z) \in \{(0 ; 0 ; 0) ; (5 ; 0 ; 2) ; (3 ; 6 ; 1)\}$

أي : $n \in \{\overline{000} ; \overline{502} ; \overline{361}\}$ في النظام ذو الأساس 7

إذن : $n \in \{0 ; 247 ; 190\}$ في النظام ذو الأساس 10

تحقيق :

$247 = 11 \times 22 + 5$ ، $22 = 11 \times 2 + 0$ ، $2 = 11 \times 0 + 2$ (البواقي: 5 ، 0 ، 2)

$190 = 11 \times 17 + 3$ ، $17 = 11 \times 1 + 6$ ، $1 = 11 \times 0 + 1$ (البواقي: 3 ، 6 ، 1)

إذن : في النظام ذو الأساس 11 : $190 = \overline{163}$ و $247 = \overline{205}$

التمرين ــ 21

1 ــ بين أن إذا كانت الثنائية $(x\,;\,y)$ من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45\,x - 28\,y = 130$
فإن x زوجي و y مضاعف 5

2 ــ عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في النظام ذو الأساس 9 و يكتب $\overline{5\beta\beta6}$ في النظام ذو الأساس 7

الحـل ــ 21

1 ــ لتكن $(x\,;\,y)$ ثنائية من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

إذا كانت $(x\,;\,y)$ حلا للمعادلة $45\,x - 28\,y = 130$ فإن $\begin{cases} 45\,x = 28\,y + 130 \\ 28\,y = 45\,x - 130 \end{cases}$ و

أي $\begin{cases} 45\,x = 2(14\,y + 65) \\ 28\,y = 5(9\,x - 26) \end{cases}$ و

أي $\begin{cases} 2 \text{ يقسم } 45\,x \\ 5 \text{ يقسم } 28\,y \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2 \text{ يقسم } x \\ 5 \text{ يقسم } y \end{cases}$ و أي $\begin{cases} x \text{ زوجي} \\ y \text{ مضاعف } 5 \end{cases}$

2 ــ في النظام ذو الأساس 9 : $n = \overline{2\alpha\alpha3}$ حيث $0 \le \alpha \le 8$

إذن : $n = 2\times 729 + 81\,\alpha + 9\,\alpha + 3 = 1461 + 90\,\alpha$

في النظام ذو الأساس 7 : $n = \overline{5\beta\beta6}$ حيث $0 \le \beta \le 6$

إذن : $n = 5\times 343 + 49\,\beta + 7\,\beta + 6 = 1721 + 56\,\beta$

منه : $1461 + 90\,\alpha = 1721 + 56\,\beta$

أي : $90\,\alpha - 56\,\beta = 260$

منه : $45\,\alpha - 28\,\beta = 130$

منه حسب السؤال (1) فإن β مضاعف 5 و α زوجي .

لكن $\begin{cases} 0 \le \beta \le 6 \\ 0 \le \alpha \le 8 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \beta = 0 \text{ أو } \beta = 5 \\ \alpha \in \{0\,;2\,;4\,;6\,;8\} \end{cases}$

منه الحالات التالية :

أولا : $\beta = 0$ إذن : $45\,\alpha = 130$

منه : $\alpha = \dfrac{130}{45} = \dfrac{26}{9}$ مرفوض

ثانيا : $\beta = 5$ إذن : $45\,\alpha = 28(5) + 130$

أي : $\alpha = \dfrac{270}{45} = 6$

نتيجة : $\beta = 5$ و $\alpha = 6$

إذن : $\begin{cases} n = 1461 + 60(6) = 2001 \\ n = 1721 + 56(5) = 2001 \end{cases}$ أو

التمرين ــ 22

N عدد طبيعي يكتب $\overline{x\,y\,z\,x}$ في النظام ذو الأساس 11 و يكتب $\overline{y\,y\,x\,z}$ في النظام ذو الأساس 7
أكتب العدد N في النظام العشري .

الحـل ــ 22

لتكن A المجموعة المعرفة بـــ $A = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

الأعداد x ، y ، z هي أرقام في النظام ذو الأساس 7 إذن $x\in A$ ؛ $y\in A$ ، $z\in A$.

في النظام ذو الأساس 11 : $N = 11^3\,x + 11^2\,y + 11\,z + x = 1332\,x + 121\,y + 11\,z$

في النظام ذو الساس 7 : $N = 7^3\,y + 7^2\,y + 7\,x + z = 392\,y + 7\,x + z$

منه : $1332\,x + 121\,y + 11\,z = 392\,y + 7\,x + z$

أي : $1325\,x + 10\,z = 271\,y$

أي : $5(265\,x + 2\,z) = 271\,y$ .... (1)

إذن : 5 يقسم $271\,y$ منه 5 يقسم y أي $y \in \{0\,;5\}$ (لأن $y\in A$)

إذن نميز حالتين :

الأولى : $y = 5$ إذن : المساواة (1) تصبح : $5(265x + 2z) = 271 \times 5$

أي $265x + 2z = 271$

منه : $x = 1$ و $z = 3$

الثانية : $y = 0$ إذن : المساواة (1) تصبح : $265x + 2z = 0$

منه : $z = 0$ و $x = 0$

خلاصة : $(x ; y ; z) \in \{(0 ; 0 ; 0) ; (1 ; 5 ; 3)\}$

من أجل $(x ; y ; z) = (0 ; 0 ; 0)$ فإن $N = 0$

من أجل $(x ; y ; z) = (1 ; 5 ; 3)$ فإن : $N = 1332 + 5(121) + 11(3)$

$= 1332 + 605 + 33 = 1970$

نتيجة : قيم N المطلوبة هي $\{0 ; 1970\}$

التمرين – 23

n عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس 9 : $n = \overline{127x}$

1 – عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8

2 – عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11

الحل – 23

x رقم في النظام ذو الأساس 9 إذن : $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

$n = \overline{127x}$ إذن : $n = 1 \times 9^3 + 2 \times 9^2 + 7 \times 9 + x$

أي : $n = 954 + x$

1 – لدينا $954 \equiv 2[8]$ إذن : $954 + x \equiv 2 + x[8]$ أي $n \equiv 2 + x[8]$

منه : يكون n قابلا للقسمة على 8 إذا و فقط إذا كان $x + 2 \equiv 0[8]$

أي $x \equiv -2[8]$

أي $x \equiv 6[8]$

أي $x = 6$ لأن $0 \leq x \leq 8$

2 – لدينا $954 \equiv 8[11]$ منه $954 + x \equiv 8 + x[11]$ أي $n \equiv x + 8[11]$

إذن : يكون n قابلا للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $x + 8 \equiv 0[11]$

أي $x \equiv -8[11]$

أي $x \equiv 3[11]$

منه : $x = 3$ لأن $0 \leq x \leq 8$

التمرين – 24

عين العددين الطبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n = \overline{27x85y}$ المكتوب في النظام العشري قابلا للقسمة على 3 و على 11

الحل – 24

كل من الأعداد الطبيعية x و y هي أرقام في النظام العشري .

إذن : $0 \leq x \leq 9$ و $0 \leq y \leq 9$

$n \equiv 0[3]$ يكافئ $2 + 7 + x + 8 + 5 + y \equiv 0[3]$

يكافئ $x + y + 22 \equiv 0[3]$

يكافئ $x + y + 1 \equiv 0[3]$ لأن $22 \equiv 1[3]$

يكافئ $x + y \equiv 2[3]$ ....(1)

$n \equiv 0[11]$ يكافئ $y - 5 + 8 - x + 7 - 2 \equiv 0[11]$

يكافئ $y - x + 8 \equiv 0[11]$

يكافئ $y - x \equiv 3[11]$ لأن $-8 \equiv 3[11]$

منه : $y - x = 3$ أو $y - x = -8$ لأن $-9 \leq y - x \leq 9$

أي $y = x + 3$ أو $y = x - 8$

منه { إما $y = x + 3$ و $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
أو $y = x - 8$ و $x \in \{8 ; 9\}$

منه : $(x ; y) \in \{(0 ; 3) ; (1 ; 4) ; (2 ; 5) ; (3 ; 6) ; (4 ; 7) ; (5 ; 8) ; (6 ; 9) ; (8 ; 0) ; (9 ; 1)\}$

لكن $x + y \equiv 2[3]$

إذن : $(x ; y) \in \{(4 ; 7) ; (1 ; 4) ; (8 ; 0)\}$

نتيجة : $n \in \{274857 ; 271854 ; 278850\}$

التمرين ــ 25

x عدد طبيعي

1 ــ برهن أن : $3x \equiv 0[7]$ تكافئ $x \equiv 0[7]$

ليكن N و M عددين طبيعيين مكتوبين في النظام العشري كمايلي :

$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ و $M = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$

2 ــ برهن أن N يقبل القسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $M - 2a_0$ يقبل القسمة على 7

3 ــ إستعمل هذه الطريقة لتبرير ما إذا كان العددان 105154 و 263572 قابلان للقسمة على 7

الحــل ــ 25

1 ــ ليكن x عدد طبيعي . لندرس بواقي قسمة 3x على 7 كمايلي :

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$3x \equiv ?[7]$	0	3	6	2	5	1	4

نتيجة : $3x \equiv 0[7]$ يكافئ $x \equiv 0[7]$

2 ــ لدينا : $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

إذن : $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$

$= 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0$

$= 10M + a_0$ لأن $M = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1$

منه : $N \equiv 10M + a_0[7]$

أي : $N \equiv 3M + a_0[7]$ لأن $10 \equiv 3[7]$

نتيجة : $N \equiv 0[7]$ يكافئ $3M + a_0 \equiv 0[7]$

يكافئ $3M + 15a_0 \equiv 0[7]$ لأن $15a_0 \equiv a_0[7]$

يكافئ $3(M + 5a_0) \equiv 0[7]$

يكافئ $M + 5a_0 \equiv 0[7]$ حسيب السؤال (1)

يكافئ $M - 2a_0 \equiv 0[7]$ لأن $5 \equiv -2[7]$

خلاصة : يكون N قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $M - 2a_0$ قابلا للقسمة على 7

3 ــ لنستعمل طريقة هذا التمرين لإثبات ما إذا كان العدد 105154 قابلا للقسمة على 7 كمايلي :

الخطوة الأولى : $N = 105154$ ؛ $M = 10515$

إذن : $M - 2a_0 = 10515 - 2(4) = 10507$ هل 10507 قابل للقسمة على 7 ؟

الخطوة الثانية : $N = 10507$ ؛ $M = 1050$

$M - 2a_0 = 1050 - 2(7) = 1036$ هل 1036 قابل للقسمة على 7 ؟

الخطوة الثالثة : $N = 1036$ ؛ $M = 103$

$M - 2a_0 = 103 - 2(6) = 91$ هل 91 قابل للقسمة على 7 ؟

الخطوة الرابعة : $N = 91$ ؛ $M = 9$

$M - 2a_0 = 9 - 2(1) = 7$

نتوقف : $M - 2a_0 \equiv 0[7]$ إذن : 91 مضاعف 7

منه : 1036 مضاعف 7

منه : 10507 مضاعف 7

منه : 105154 مضاعف 7 . (يقبل القسمة على 7)

لنعد نفس الطريقة بالنسبة للعدد 263572

$M - 2a_0 = 26357 - 4 = 26353$: إذن $M = 26357$ ؛ $N = 263572$
$M - 2a_0 = 2635 - 6 = 2629$: إذن $M = 2635$ ؛ $N = 26353$
$M - 2a_0 = 262 - 18 = 244$: إذن $M = 262$ ؛ $N = 2629$
$M - 2a_0 = 24 - 8 = 16$: إذن $M = 24$ ؛ $N = 244$

يمكن أن نتوقف هنا لأن 16 ليس مضاعف 7 إذن : 244 ليس مضاعف 7
منه 2629 ليس مضاعف 7 و منه 26353 ليس مضاعف 7 إذن 263572 ليس مضاعف 7

تحقيق :

```
263572 | 7              105154 | 7
 53    | 37653           35    | 15022
  45                      01
   37                      15
    22                      14
    [1]                     [0]
```

التمرين – 26

N و M عددان طبيعيان يكتبان في النظام العشري كمايلي :
$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ **و** $M = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$

1 – برهن أن N يقبل القسمة على 13 إذا و فقط إذا كان $M + 4a_0$ يقبل القسمة على 13
2 – إستعمل هذه الطريقة لتبرير ما إذا كان العدد 1631216 قابلا للقسمة على 13

الحـل – 26

1 –
$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
$$= 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0$$
$$= 10M + a_0$$

نتيجة : $N \equiv 10M + a_0[13]$
لكن : $a_0 \equiv 40a_0[13]$ لأن $40 \equiv 1[13]$

إذن : $N \equiv 10M + 40a_0[13]$
أي $N \equiv 10(M + 4a_0)[13]$
منه : يكون $N \equiv 0[13]$ إذا و فقط إذا كان $10(M + 4a_0) \equiv 0[13]$
أي $M + 4a_0 \equiv 0[13]$ لأن لا يوجد قواسم مشتركة بين 13 و 10

2 – هل 1631216 قابل للقسمة على 13 ؟

$N = 1631216$ ؛ $M = 163121$ ؛ $M + 4a_0 = 163121 + 24 = 163145$
$N = 163145$ ؛ $M = 16314$ ؛ $M + 4a_0 = 16314 + 20 = 16334$
$N = 16334$ ؛ $M = 1633$ ؛ $M + 4a_0 = 1633 + 16 = 1649$
$N = 1649$ ؛ $M = 164$ ؛ $M + 4a_0 = 164 + 36 = 200$
$N = 200$ ؛ $M = 20$ ؛ $M + 4a_0 = 20 + 0 = 20$

$N = 20$ لا يقبل القسمة على 13 إذن : نتوقف .
نتيجة : العدد 1631216 لا يقبل القسمة على 13

تحقيق :

```
1631216 | 13
 33     | 125478
  71
   62
   101
    106
      2
```

التمرين – 27

N عدد طبيعي يكتب في النظام العشري من الشكل $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$
1 – بين أن العدد N يكون قابلا للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$ مضاعفا لـ 11
2 – هل الأعداد التالية قابلة للقسمة على 11 : 72792973 ؛ 43141408431

الحــل ــ 27

1 ــ $10 \equiv -1[11]$ إذن :
$$\left.\begin{array}{l} 10^n \equiv (-1)^n[11] \\ 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1}[11] \\ \vdots \\ 10^2 \equiv (-1)^2[11] \\ 10 \equiv -1[11] \end{array}\right\} \text{ منه } \left\{\begin{array}{l} a_n \times 10^n \equiv (-1)^n a_n[11] \\ a_{n-1} \times 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} a_{n-1}[11] \\ \vdots \\ a_2 \times 10^2 \equiv a_2[11] \\ a_1 \times 10 \equiv -a_1[11] \end{array}\right.$$

منه $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 \equiv a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + ...- a_1[11]$

منه $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + ... - a_1 + a_0[11]$

أي : $N \equiv a_0 - a_1 + ... + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_n(-1)^n[11]$

منه : يكون $N \equiv 0[11]$ إذا و فقط إذا كان $a_0 - a_1 + ... + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_n(-1)^n \equiv 0[11]$

2 ــ هل العدد 72792973 مضاعف 11 ؟

$3 - 7 + 9 - 2 + 9 - 7 + 2 - 7 = 0$ مضاعف 11

إذن : العدد 72792973 مضاعف 11

هل العدد 43141408431 مضاعف 11 ؟

$1 - 3 + 4 - 8 + 0 - 4 + 1 - 4 + 1 - 3 + 4 = -11$ مضاعف 11

إذن : العدد 43141408431 مضاعف 11

التمرين ــ 28

a عدد طبيعي أكبر تماما من 1

1 ــ انشر الجداء : $A = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

2 ــ إستنتج أنه في كل نظام تعداد يكون العدد 10101 يقبل القسمة على 111 ثم عين حاصل هذه القسمة .

ملاحظة : العدد $(a - 1)$ نرمز له بــ β في نظام التعداد ذو الأساس a حيث $a > 2$

الحــل ــ 28

1 ــ
$$A = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$
$$= a^4 - a^3 + a^2 + a^3 - a^2 + a + a^2 - a + 1$$

إذن : $A = a^4 + a^2 + 1$

2 ــ ليكن N عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس a (حيث $a > 1$) : $N = \overline{10101}$

إذن : $N = a^4 + 0a^3 + a^2 + 0a + 1$ أي $N = a^4 + a^2 + 1$

منه : حسب السؤال (1) فإن : $N = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$ ...... (1)

لدينا : $a^2 + a + 1 = \overline{111}$ في نظام التعداد ذو الأساس a

و $a^2 - a + 1 = (a - 1)a + 1$ منه في النظام ذو الأساس a فإن $a^2 - a + 1 = \overline{\beta 1}$

حيث β هو رمز الرقم $(a - 1)$ في نظام التعداد ذو الأساس a

نتيجة : المساواة (1) تصبح : $\overline{10101} = \overline{111} \times \overline{\beta 1}$

أي : العدد $\overline{10101}$ يقبل القسمة على $\overline{111}$ و حاصل هذه القسمة يساوي $\overline{\beta 1}$

التمرين ــ 29

a عدد طبيعي أكبر تماما من 1

1 ــ في نظام التعداد ذو الأساس a بين أن العدد $\overline{1001}$ يقبل القسمة على $\overline{11}$

2 ــ نمثل العدد $(a - 1)$ بالرقم β . عين حاصل قسمة العدد $\overline{1001}$ على $\overline{11}$

3 ــ تحقق من هذه النتائج في النظام ذو الأساس 10 ثم في النظام ذو الأساس 12

الحــل ــ 29

1 ــ في نظام التعداد ذو الأساس a لدينا : $\overline{1001} = a^3 + 1$
$$= (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$a^3 + 1$	$a + 1$
$a^3 + a^2$	$a^2 - a + 1$
$-a^2 + 1$	
$-a^2 - a$	
$a + 1$	
$a + 1$	
0	

لدينا : $a + 1 = \overline{11}$

إذن : العدد $\overline{1001}$ قابل للقسمة على $\overline{11}$

2 ــ حسب السؤال (1) لدينا : $\overline{1001} = (a + 1)(a^2 - a + 1)$
$$= (a + 1)[(a - 1)a + 1]$$
$$= \overline{11} \times \overline{\beta 1}$$

لأن $\left\{\begin{array}{l} \beta = a - 1 \\ (a - 1)a + 1 = \overline{\beta 1} \end{array}\right.$

نتيجة : حاصل قسمة العدد $\overline{1001}$ على $\overline{11}$ هو $\overline{\beta 1}$

3 ــ **تحقيق :** في النظام العشري لدينا :

$$\begin{array}{r|l} 1001 & 11 \\ 11 & 91 \\ \boxed{0} & \end{array}$$

في النظام ذو الأساس 12 : $\overline{1001} = (12)^3 + 1 = 1729$

$\overline{11} = 12 + 1 = 13$

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 1729 & 13 \\ 42 & 133 \\ 39 & \\ \boxed{0} & \end{array}$$

لنبحث عن كتابة العدد 133 في النظام ذو الأساس 12 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l|l} 133 & 12 & \\ 13 & 11 & 12 \\ \boxed{1} & \boxed{\beta} & 0 \end{array}$$

إذن : $133 = \overline{\beta 1}$

<u>**التمرين ــ 30**</u>

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 3$ يكون العدد $\overline{1331}$ المكتوب في النظام ذو الأساس a هو مكعب لعدد طبيعي .

2 ــ عين أساس النظام الذي يكون فيه العدد $\overline{14641}$ قوة رابعة لعدد طبيعي .

<u>**الحـل ــ 30**</u>

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 3$ لدينا في النظام ذو الأساس a :

$$\overline{1331} = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$$

إذن : العدد $\overline{1331}$ في النظام ذو الأساس a هو مكعب للعدد $(a + 1)$

2 ــ ليكن a أساس النظام الذي يكتب فيه العدد $\overline{14641}$ حيث $a > 6$

إذن : $\overline{14641} = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

$= (a+1)^4$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 6$ فإن العدد $\overline{14641}$ المكتوب في النظام ذو الأساس a هو قوة رابعة للعدد $(a + 1)$

<u>**التمرين ــ 31**</u>

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . نضع $a = n^2 + 1$

1 ــ أكتب في النظام ذو الأساس a الأعداد التالية : $n^2 + 2$ ؛ $n^2 + 2n$ ؛ $(n^2 + 2)^2$ ؛ n^4

2 ــ تحقق من نتائج السؤال (1) من أجل $a = 5$ ثم $a = 10$

3 ــ أكتب في النظام ذو الأساس a الأعداد التالية : $u = n(n^2 + 2)$ ، $v = n^2(n^2 + 2)$

<u>**الحـل ــ 31**</u>

1 ــ لدينا $n > 1$ منه $n^2 > 1$

إذن : $n^2 + 1 > 2$ أي $a > 2$

أي : كل من 0 ، 1 ، 2 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

من جهة أخرى $a = n^2 + 1$ إذن : $n^2 = a - 1$ أي $n^2 < a$

و خاصة $n < a$ إذن : كل من n و n^2 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

لنبحث إذن عن كتابات الأعداد المطلوبة في النظام ذو الأساس a :

$$n^2 + 2 = (n^2 + 1) + 1 = a + 1 = \overline{11}$$

$$n^2 + 2n = n^2 + 1 + 2n - 1 = a + (2n - 1)$$

لنثبت أن $2n - 1 < a$

لدينا : $a - (2n - 1) = n^2 + 1 - (2n - 1)$

$= n^2 - 2n + 2$ كثير حدود من الدرجة (2)

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ إذن : من أجل كل n من N فإن $n^2 - 2n + 2 > 0$

أي : $a - (2n - 1) > 0$ منه $a > 2n - 1$

ليكن α رمز العدد $2n - 1$ في النظام ذو الأساس a

إذن : $n^2 + 2n = a + \alpha$

منه : $n^2 + 2n = \overline{1\alpha}$

$(n^2+2)^2 = [(n^2+1)+1]^2 = (a+1)^2 = a^2+2a+1 = \overline{121}$

لدينا $a = n^2+1$ إذن $n^2 = a-1$ منه $n^4 = (a-1)^2$

أي : $n^4 = a^2 - 2a + 1$

لاحظ أن : $(a^2+2a+1)+(a^2-2a+1) = 2a^2+2 = \overline{202}$ و لاحظ أيضا أن $a^2+2a+1 = \overline{121}$

منه : $\overline{121} + (a^2-2a+1) = \overline{202}$

أي $a^2 - 2a + 1 = \overline{202} - \overline{121} = \overline{\beta 1}$

حيث β هو رمز الرقم $(a-2)$

نتيجة : $n^4 = \overline{\beta 1}$

2 ـ من أجل $a = 5$ فإن $n^2 = 4$ إذن $n = 2$:

إذن : $n^2+2 = 6$ ؛ $n^2+2n = 8$ ؛ $(n^2+2)^2 = 36$ ؛ $n^4 = 16$

لدينا : $6 = \overline{11}$

$\alpha = 2n-1 = 3$ منه $8 = \overline{13}$

$36 = \overline{121}$

$\beta = 5-2 = 3$ إذن : $16 = \overline{31}$

التحقيق :

$$\begin{cases} \overline{11} = 5+1 = 6 \\ \overline{13} = 5+3 = 8 \\ \overline{121} = 25+10+1 = 36 \\ \overline{31} = 15+1 = 16 \end{cases}$$ في نظام التعداد ذو الأساس 5

من أجل $a = 10$ فإن $n^2 = 9$ منه $n = 3$

إذن : $n^2+2 = 11$ ؛ $n^2+2n = 15$ ؛ $(n^2+2)^2 = 121$ ؛ $n^4 = 81$

لدينا : $11 = \overline{11}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

$\alpha = 2n-1 = 5$ منه $15 = \overline{15}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

$121 = \overline{121}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

$\beta = 10-2 = 8$ منه $81 = \overline{81}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

3 ـ

$$\begin{aligned} u &= n(n^2+2) \\ &= n[(n^2+1)+1] \\ &= n(a+1) \\ &= na+n \\ &= \overline{\lambda\lambda} \end{aligned}$$ حيث λ هو رمز الرقم n

$$\begin{aligned} v &= n^2(n^2+2) \\ &= n^2[(n^2+1)+1] \\ &= n^2(a+1) \\ &= n^2 a + n^2 \\ &= \overline{\gamma\gamma} \end{aligned}$$ حيث γ هو رمز الرقم n^2

التمرين ـ 32

ليكن N عدد طبيعي فردي و ليس أولي حيث يكتب من الشكل $N = a^2 - b^2$

a و b عددان طبيعيان يحققان $a > b$

1 ـ برهن أن a و b ليسا من شفعية واحدة (أحدهما زوجي و الآخر فردي)

نقبل أن العدد 250507 ليس أولي .

لتكن المعادلة $a^2 - 250507 = b^2$ ....(E) ذات المجهولين الطبيعيين a و b

2 ـ عين البواقي الممكنة للعدد x^2 على 9 من أجل كل قيم العدد الطبيعي x

3 ـ إستنتج البواقي الممكنة للعدد $250507 - a^2$ بترديد 9 ثم عين بواقي a^2 بترديد 9 في كل حالة .

4 ـ برهن أن البواقي الممكنة للعدد a بترديد 9 هما 1 و 8

5 ـ برهن أن إذا كانت الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E) فإن $a \geq 501$

6 ـ برهن أنه لا يوجد أي ثنائية من الشكل $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

لتكن الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E)

7 ــ برهن أن $a \equiv 503[9]$ أو $a \equiv 505[9]$

8 ــ عين أصغر عدد طبيعي **k** حيث تكون الثنائية **(505 + 9 k ; b)** تحقق المعادلة **(E)** ثم أعط قيمة **b**

9 ــ إستنتج مما سبق تحليلا إلى جداء عاملين للعدد **250507**

10 ــ هل العاملين أوليين فيما بينهما ؟

الحــل ــ 32

1 ــ $N = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

لدينا الحالات الممكنة التالية :

شفعية a	شفعية b	شفعية a + b أو a - b	شفعية N
فردي	فردي	زوجي	زوجي
فردي	زوجي	فردي	فردي
زوجي	زوجي	زوجي	زوجي
زوجي	فردي	فردي	فردي

نتيجة : يكون N فردي إذا و فقط إذا كان a و b ليسا من نفس الشفعية

2 ــ بواقي قسمة x^2 على 9

$x \equiv ?[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 \equiv ?[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1

3 ــ لدينا : $250507 \equiv 1[9]$ منه $-250507 \equiv -1[9]$

أي $-250507 \equiv 8[9]$ لأن $-1 \equiv 8[9]$

إذن : $a^2 - 250507 \equiv a^2 + 8[9]$

إذا وضعنا $x = b$ فإن : $x^2 = b^2$ أي $x^2 = a^2 - 250507$

منه : $x^2 \equiv a^2 + 8[9]$

أي : $x^2 - 8 \equiv a^2[9]$

أو : $a^2 \equiv x^2 - 8[9]$

منه الجدول التالي :

$x \equiv ?[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 \equiv ?[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$x^2 - 8 \equiv ?[9]$	1	2	5	1	8	8	1	5	2

4 ــ حسب السؤال (1) فإن البواقي الممكنة للعدد x^2 على 9 هي : $\{0 ; 1 ; 4 ; 7\}$

إذن : البواقي المقبولة للعدد $x^2 - 8$ هي 1 فقط لأن $a^2 \equiv x^2 - 8[9]$

و بواقي a^2 بترديد 9 لا يمكن أن تكون من المجموعة $\{2 ; 5 ; 8\}$

منه : $a^2 \equiv 1[9]$ أي $a \equiv 1[9]$ أو $a \equiv 8[9]$

5 ــ لتكن الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E)

إذن : $b^2 = a^2 - 250507$

منه : $a^2 = 250507 + b^2$

إذن : $a^2 \geq 250507$ لأن $b^2 \geq 0$

أي : $a \geq \sqrt{250507}$

أي : $a \geq 501$

6 ــ من أجل $a = 501$ المعادلة (E) تكافئ $(501)^2 - 250507 = b^2$

تكافئ $251001 - 250507 = b^2$

تكافئ $494 = b^2$

تكافئ $b = \sqrt{494}$ إذن $b \notin IN$

نتيجة : لا توجد أي ثنائية $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

7 ــ حسب السؤال (5) فإن $a \neq 501$ لأن لا توجد ثنائية $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

إذن : $a \geq 502$

منه : a يكتب من الشكل $a = 502 + n$ حيث $n \in IN$

لدينا حسب السؤال (4) : $a \equiv 1[9]$ أو $a \equiv 8[9]$ أي $502 + n \equiv 1[9]$ أو $502 + n \equiv 8[9]$

أي $n \equiv -501[9]$ أو $n \equiv -494[9]$

أي $n \equiv 3[9]$ (لأن $-501 \equiv 3[9]$) أو $n \equiv 1[9]$ (لأن $-494 \equiv 1[9]$)

أي $n = 9k + 3$ أو $n = 9k + 1$ $(k \in IN)$

نتيجة : من أجل $n = 9k + 3$ فإن : $a = 502 + 9k + 3$ أي $a = 505 + 9k$

من أجل $n = 9k + 1$ فإن : $a = 502 + 9k + 1$ أي $a = 503 + 9k$

إذن : إما $a \equiv 503[9]$ أو $a \equiv 505[9]$

8 ــ تكون الثنائية $(505 + 9k ; b)$ حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كان العدد $(505 + 9k)^2 - 250507$ مربعا تاما كمايلي :

$$(505 + 9k)^2 - 250507 = (505)^2 + 18(505)k + (9k)^2 - 250507$$
$$= 4518 + 81k^2 + 9090k$$
$$= 9(502 + 9k^2 + 1010k)$$

إذن يكفي أن يكون العدد $A = 502 + 9k^2 + 1010k$ مربعا تاما .

لنجرب قيم k كمايلي :

من أجل $k = 0$: $A = 502$ ليس مربع تاما .

من أجل $k = 1$: $A = 502 + 9 + 1010 = 1521$ إذن : $A = (39)^2$ مربع تام .

نتيجة : أصغر عدد طبيعي k حيث الثنائية $(505 + 9k ; b)$ حل للمعادلة (E) هي $k = 1$

إذن : $(505 + 9k)^2 - 250507 = 9 \times (39)^2$

أي : $b^2 = (3 \times 39)^2$

منه : $b = 3 \times 39 = 117$

أي : الثنائية $(514 ; 117)$ هي حل للمعادلة (E) ($k = 1$ إذن : $a = 505 + 9 = 514$)

9 ــ لدينا الثنائية $(514 ; 117)$ حل للمعادلة (E) إذن :

$$(514)^2 - 250507 = (117)^2$$

أي : $(514)^2 - (117)^2 = 250507$

أي : $(514 - 117)(514 + 117) = 250507$

أي : $250507 = 397 \times 631$ و هو التحليل المطلوب

10 ــ لنبحث عن $PGCD(631 ; 397)$ باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$631 = 397 \times 1 + 234$ ، $397 = 234 \times 1 + 163$ ، $234 = 163 \times 1 + 71$ ، $163 = 71 \times 2 + 21$ ، $71 = 21 \times 3 + 8$

$21 = 8 \times 2 + 5$ ، $8 = 5 \times 1 + 3$ ، $5 = 3 \times 1 + 2$ ، $3 = 2 \times 1 + 1$

نتيجة : $PGCD(631 ; 397) = 1$ إذن : العاملين 631 و 397 أوليان فيما بينهما

التمرين ــ 33

نريد دراسة وجود ثلاث أعداد طبيعية x ، y ، z تحقق :

$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$........ (E) من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$

الجزء I : ليكن $n = 2$

1 ــ تحقق أن الثلاثية $(x ; y ; z) = (1 ; 3 ; 5)$ تحقق الشرط (E)

2 ــ ليكن $n = 3$. m عدد طبيعي باقي قسمته على 8 هو r و باقي قسمة m^2 على 8 هو R

أكمل الجدول المقابل :

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

3 ـ هل يمكن إيجاد ثلاث أعداد طبيعية x ، y ، z حيث $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$

الجزء II : ليكن $n > 3$

نفرض أنه توجد أعداد طبيعية x ، y ، z تحقق الشرط (E)

1 ـ برر أن الأعداد x ، y ، z كلها فردية أو من بينها عددين زوجيين فقط .

نفرض أن x و y زوجيان و z فردي

2 ـ برهن أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$

3 ـ إستنتج أن هناك تناقض

نفرض أن x ، y ، z كلها فردية .

4 ـ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي k : $k^2 + k \equiv 0[2]$

5 ـ إستنتج أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$. ماذا تستنتج ؟

الحـل ـ 33

الجزء I

1 ـ $(x ; y ; z) = (1 ; 3 ; 5)$ إذن : $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 9 + 25 = 35$

بما أن $35 \equiv 3[4]$ أي $35 \equiv 3[2^2]$ و $3 = 2^2 - 1$

فإن الثلاثية $(1 ; 3 ; 5)$ تحقق الشرط (E) من أجل $n = 2$

2 ـ

$m \equiv ?[8]$	r	0	1	2	3	4	5	6	7
$m^2 \equiv ?[8]$	R	0	1	4	1	0	1	4	1

3 ـ حسب الجدول فإن البواقي الممكنة لقسمة مربع عدد طبيعي على 8 هي $\{0 ; 1 ; 4\}$

إذن البواقي الممكنة لقسمة x^2 أو y^2 أو z^2 على 8 هي أيضا $\{0 ; 1 ;4\}$

لنبحث إذن على البواقي الممكنة لقسمة $x^2 + y^2$ على 8 كمايلي :

x^2 \ y^2	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

إذن : البواقي الممكنة لـ قسمة $x^2 + y^2$ على 8 هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5\}$

منه : البواقي الممكنة لـ قسمة $x^2 + y^2 + z^2$ على 8 هي كمايلي :

z^2 \ $x^2 + y^2$	0	1	2	4	5
0	0	1	2	4	5
1	1	2	3	5	6
4	4	5	6	0	1

نتيجة : البواقي الممكنة لقسمة $x^2 + y^2 + z^2$ على 8 هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

إذن : لا يمكن إيجاد ثلاث أعداد طبيعية x ، y ، z تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$

الجزء II

1 ـ لتكن الثلاثية $(x ; y ; z)$ تحقق الشرط (E) إذن : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$

إذن : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \equiv 2^n [2^n]$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \equiv 0[2^n]$

إذن : العدد $(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$ زوجي أي العدد $(x^2 + y^2 + z^2)$ فردي

نميز الحالات التالية :
نرمز إلى العدد الزوجي بـــ 0
نرمز إلى العدد الفردي بـــ 1

x	y	z	x^2	y^2	z^2	$x^2+y^2+z^2$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

نتيجة : حسب الجدول يكون $x^2+y^2+z^2$ فرديا
في حالتين فقط :
إما x ، y ، z فر.ية كلها
أو أحدها فردي و الآخرين زوجيين

2 ــ x و y زوجيان و z فردي .
نضع $x = 2k$ ؛ $y = 2p$ ؛ $z = 2q+1$
$$x^2+y^2+z^2 = 4k^2+4p^2+4q^2+4q+1 = 4(k^2+p^2+q^2+q)+1$$
إذن : $x^2+y^2+z^2 \equiv 1[4]$

3 ــ لدينا : $x^2+y^2+z^2 \equiv 1[4]$ إذن : $x^2+y^2+z^2 = 4k+1$ حيث $k \in IN$
إذا كان $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$ فإن : $x^2+y^2+z^2 = m \times 2^n + 2^n - 1$ حيث $m \in IN$
إذن : $4k+1 = m \times 2^n + 2^n - 1$
أي : $4k+2 = 2^n(m+1)$
أي : $(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ 2(2k+1) = 2^n(m+1)$
بما أن $n > 3$ فإن : $2^n = 2 \times 2 \times 2^{n-2}$
منه المساواة (α) تصبح : $2(2k+1) = 2 \times 2 \times 2^{n-2}(m+1)$
أي : $(2k+1) = 2 \times 2^{n-2}(m+1)$ و هذا تناقض
لأن $(2k+1)$ فردي و $2 \times 2^{n-2}(m+1)$ زوجي
إذن : لا يمكن أن يكون x و y زوجيان و z فردي

4 ــ لندرس بواقي قسمة العدد k^2+k على 2 كمايلي :

$k \equiv ?[2]$	0	1
$k^2 \equiv ?[2]$	0	1
$k^2+k \equiv ?[2]$	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي k فإن $k^2+k \equiv 0[2]$

5 ــ x ، y ، z أعداد فردية إذن : نضع $x = 2k+1$ ؛ $y = 2p+1$ ؛ $z = 2q+1$
منه : $x^2+y^2+z^2 = 4k^2+4k+1+4p^2+4p+1+4q^2+4q+1$
$= 4(k^2+k)+4(p^2+p)+4(q^2+q)+3$
لكن حسب السؤال السابق فإن كل من الأعداد k^2+k و p^2+p و q^2+q هي أعداد زوجية
إذن : $k^2+k = 2k'$ ؛ $p^2+p = 2p'$ ؛ $q^2+q = 2q'$ حيث k' ؛ p' ؛ q' اعداد طبيعية
منه : $x^2+y^2+z^2 = 4(2k')+4(2p')+4(2q')+3$
$= 8k'+8p'+8q'+3$
$= 8(k'+p'+q')+3$
إذن : $x^2+y^2+z^2 \equiv 3[8]$

نتيجة : لدينا : $x^2+y^2+z^2 \equiv 3[8]$ إذن : $x^2+y^2+z^2 = 8k+3$ حيث $k \in IN$
إذا كان $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$ فإن $x^2+y^2+z^2 = p \times 2^n + 2^n - 1$
إذن : $8k+3 = p \times 2^n + 2^n - 1$
أي : $8k+4 = 2^n(p+1)$
أي : $(\beta) \ldots\ldots\ldots\ 4(2k+1) = 2^n(p+1)$
لكن $n > 3$ إذن : $2^n = 2 \times 2 \times 2 \times 2^{n-3}$
منه المساواة (β) تصبح : $4(2k+1) = 2 \times 2 \times 2 \times 2^{n-3}(p+1)$
أي : $2k+1 = 2 \times 2^{n-3}(p+1)$ تناقض لأن $(2k+1)$ عدد فردي
و $2 \times 2^{n-3}(p+1)$ عدد زوجي .

خلاصة : من أجل $n > 3$ لا توجد أي ثلاثية $(x ; y ; z)$ من الأعداد الطبيعية تحقق الشرط (E)

الفهرس



TEL : 0773 26 52 81